APELLIDO Y NOMBRE:
NO.DE LIBRETA:

Optimización

Primer Parcial 30/05/12

1. **Búsqueda Compacta**

   Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función C^2, *estríctamente* convexa con un único mínimo x^*.

   a) Probar que $f(x) \to +\infty$ cuando $||x|| \to +\infty$. Concluir que, fijado un $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el conjunto
   $$\{y \in \mathbb{R}^n : f(y) < f(x_0)\}$$
   es acotado.

   b) Sea $\mathcal{D} = \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_n, -e_n\}$. Probar que para todo $x \neq x^*$ existe $d \in \mathcal{D}$ dirección de descenso en x. (Es decir, existe $d \in \mathcal{D}$ y $t_0 > 0$ tal que $f(x + td) < f(x)$ $\forall\, t \in (0, t_0)$).

   c) Consideramos, para $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$, la función punto a conjunto
   $$A(x, \alpha) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + \alpha d,\ d \in \mathcal{D}\}$$
   Probar que A es cerrada en (x, α) si $\alpha \neq 0$.

   d) Estudiamos el algoritmo de Búsqueda Compacta, dado por:

   i. Tomar $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_0 > 0$, $k = 0$.
   ii. Si existe $y \in A(x_k, \alpha_k)$ tal que $f(y) < f(x)$
   Poner $x_{k+1} = y$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $k = k + 1$.
   Si no,
   Poner $\alpha_k = \frac{\alpha_k}{2}$
   iii. Ir a *ii*.

   Probar que si f es C^2, estríctamente convexa, con un único mínimo x^*, entonces $x_k \to x^*$ $(k \to \infty)$.

2. **Minimización en el Primer Hiper-Octante**.

   Sea el problema
   $$\begin{cases} \min f(x) \\ x \geq 0. \end{cases}$$
   Se propone el siguiente algoritmo de búsqueda lineal que tiene en cuenta la restricción:

   Dado un punto $x = (x_1, \dots, x_n)$, la dirección $d = (d_1, \dots, d_n)$ se elige a través de una modificación del método del gradiente:
   $$d_i = \begin{cases} -\frac{\partial f}{\partial x_i} & \text{si} \quad x_i > 0 \ \text{ ó } \ \frac{\partial f}{\partial x_i} < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x_i = 0 \ \text{ y } \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0 \end{cases}$$
   Esta dirección se usa para la búsqueda en el algoritmo usual.

a) ¿Cuáles son las condiciones de primer orden para la existencia de un mínimo en este problema?

b) Mostrar que si d es definida como antes y satisface las condiciones de primer órden, entonces $d = 0$.

c) Mostrar que si $d \neq 0$ es posible bajar el valor de f en la dirección de d.

d) Sea $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 - 2x_2) + 5$, partiendo de $x^0 = (0, 0)$, construir x^1 usando el algoritmo de descenso con la dirección propuesta. Comparar con el algoritmo usual.

3. **El Tanque de Agua**

Se desea construir un tanque de base cuadrada, con capacidad para almacenar exactamente 4000mts^3 de agua. El costo de construcción de las paredes es de 1$ por metro cuadrado, mientras que el costo del techo es de 9$ por metro cuadrado. Se dispone de un terreno de $20mts. \times$20mts. Finalmente, debe tenerse en cuenta que por cuestiones de estabilidad de la construcción la altura del tanque no puede exceder el cuádruple del lado de la base. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del tanque para que el costo de construcción sea mínimo?

a) Plantear el problema como un problema de minimización con restricciones.

b) Plantear las condiciones de KKT.

c) Resolver el problema.

4. **Minimización de Cuadráticas en Bolas**.

Consideremos el problema:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min \frac{1}{2}x^t G x - b^t x + c \\ s.a. \quad \|x\|_2 \leq R \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica (NO necesariamente $G \geq 0$), $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $R > 0$.

a) Sea $\mu \geq 0$ y $z \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$(G + \mu I)z = b, \quad \text{y} \quad (G + \mu I) \geq 0.$$

Probar que:

i) Si $\mu = 0$ y $\|z\|_2 \leq R$ entonces z es solución de (1).

ii) Si $\mu \geq 0$ y $\|z\|_2 = R$ entonces z es solución de (1).

b) Sea ahora el problema:

$$\left\{ \begin{array}{c} \min x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_1 - x_3 \\ s.a. \quad \|x\|_2 \leq 2 \end{array} \right.$$

i) Mediante el resultado obtenido en *a*), hallar el/los mínimo/s del problema.

ii) Notar que $(G + \mu I) \geq 0$ en todo $\mathbb{R}^n$. Comparar con KKT en el caso general.