

## Práctica 6

### Singularidades y residuos

---

1. Sea  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ . Hallar el desarrollo en serie de Laurent de  $f$  en cada uno de los siguientes anillos:
- $0 < |z| < 1$
  - $1 < |z| < 2$
  - $|z| > 2$
  - $1 < |z-2| < 2$
2. Hallar el desarrollo en serie de Laurent de las siguientes funciones en las regiones indicadas:
- $\frac{1}{z(z-1)^2}$  en  $0 < |z-1| < 1$  y en  $|z-1| > 1$
  - $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)^2}$  en  $0 < |z+3| < 1$  y en  $2 < |z| < 3$ .
3. a) Decidir dónde convergen las series de Laurent de las siguientes funciones alrededor de  $z_0$ :
- $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  ( $z_0 = 0$ )
  - $f(z) = e^z + \frac{z^2+1}{z^2-2z+1}$  ( $z_0 = 1$ )
- b) ¿Cuánto vale el coeficiente de  $z$  en el desarrollo en serie de Laurent de  $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$  en la región  $|z| > 1$  ?
4. Si  $f$  tiene una singularidad no evitable en  $z = i$  y en  $z = 2i$ , probar que el desarrollo en serie de Laurent de  $f$  en la corona  $1 < |z| < 2$  tiene infinitos términos positivos e infinitos términos negativos no nulos.
5. Probar que en todo disco perforado  $0 < |z| < \epsilon$  la función  $e^{\frac{1}{z}}$  toma todos los valores complejos salvo el cero.
6. Sea  $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ . Mostrar que  $f$  tiene una singularidad esencial en  $z = 0$  y explicar por qué este hecho muestra que  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es una función que, si bien es indefinidamente derivable en  $\mathbb{R}$ , no coincide con su serie de Taylor en ningún entorno de cero.

7. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad aislada en  $z = 0$ . Determinar su naturaleza. Si es evitable, definir  $f(0)$  de modo que resulte holomorfa en  $z = 0$ . Si es un polo, hallar la parte singular.

a)  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z - 1)}$

b)  $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z}$

c)  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

d)  $f(z) = \frac{\log(z + 1)}{z}$

e)  $f(z) = \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

f)  $f(z) = \frac{1}{1 - e^z}$

g)  $\operatorname{sen} z \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$

8. Hallar y clasificar las singularidades en  $\mathbb{C}$  de las siguientes funciones:

a)  $f(z) = \frac{1 + z^2}{z(z - 1)^2}$

b)  $f(z) = \frac{1}{z^3} \operatorname{sen} z$

e)  $f(z) = \frac{\cos z}{z + 1}$

f)  $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$

g)  $f(z) = \cos\left(\frac{\pi}{z - \pi}\right)$

h)  $-\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z^2 + 1}\right)}$

i)  $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z + 1)z}$

9. a) Mostrar que  $f(z) = \operatorname{tg} z$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$ .  
 b) Hallar sus polos y el orden de los mismos.  
 c) Determinar la parte singular de  $f$  en cada polo.
10. Sea  $f(z) = \frac{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + \dots + b_1 z + b_0}$ . Probar  
 a)  $\infty$  es a lo sumo una singularidad aislada de  $f$ .  
 b) si  $m \leq n$ ,  $f$  es holomorfa en  $\infty$ . ¿Cuánto vale  $f$  en el punto en el infinito?  
 c) si  $m > n$ ,  $\infty$  es un polo de  $f$ . Hallar su orden.

11. Clasificar las singularidades de las siguientes funciones en  $\mathbb{C}_\infty$ :

a)  $\frac{e^z - 1 - z}{z^2}$

b)  $\frac{\cos z - 1}{z^6 + z^4}$

c)  $\frac{\cos z - 1}{(z - 2\pi)^2} + \frac{z - 3}{(z + 1)^2(z - 2)}$

d)  $e^{\frac{z}{1-z}}$

e)  $\frac{e^{z^2 + \frac{1}{z^2}} - 1}{z^2 - 1}$

12. a) Hallar una función  $f$  no holomorfa en 0 y tal que  $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$ .  
 b) Mostrar que una función puede ser holomorfa en  $\infty$  y tener residuo no nulo allí.

- c) Probar que si  $f$  tiene una singularidad esencial en  $z = a$ ,  $\frac{1}{f}$  tiene una singularidad esencial, o no aislada, en  $z = a$ .
- d) Mostrar que si  $\infty$  es un cero de  $f$  de orden mayor que 1, entonces  $\text{Res}(f, \infty) = 0$ .
- e) Mostrar que si  $\infty$  es un cero simple de  $f$ , entonces  $\text{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$ .
13. Probar:
- a) Si  $a$  es un polo de orden  $m$  de  $f$  y definimos  $g(z) = (z - a)^m f(z)$ , entonces  $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$ .
- b) Si  $a$  es un polo simple de  $f$ , entonces  $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$
14. Sea  $f$  una función meromorfa en un abierto conexo  $G$ . Probar:
- a) Si  $f$  tiene un polo de orden  $m$  en  $a \in G$ , su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo  $\text{Res}(f'/f, a) = -m$ .
- b) Si  $f$  tiene un cero de orden  $m$  en  $b \in G$ , su derivada logarítmica tiene en él un polo simple, siendo  $\text{Res}(f'/f, b) = m$ .
- c) Si  $f$  tiene un polo simple en  $a$  y  $g$  es holomorfa en  $a$  entonces  $\text{Res}(fg, a) = \text{Res}(f, a) \cdot g(a)$ .
15. Calcular los residuos de las funciones del ejercicio 8, en cada una de sus singularidades aisladas.
16. a) Clasificar en  $\mathbb{C}_\infty$  las singularidades de:
- i)  $\frac{\text{sen}(\frac{z}{z+3})}{(z+2 - \frac{i}{4\pi})(1 - e^{1/(z+2)})}$       ii)  $e^{az}(1 + e^z)^{-1} \quad (a \in \mathbb{C})$
- b) Calcular el residuo en infinito de:
- i)  $\frac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)}$       ii)  $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)z}$
17. Hallar los residuos en  $\mathbb{C}_\infty$  de las funciones del ejercicio 11, en cada una de sus singularidades aisladas.
18. Sea  $\mathcal{C}$  la circunferencia  $|z| = 2$ , recorrida una vez en sentido positivo. Calcular:
- a)  $\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^4 + 1} dz$
- b)  $\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)}$
- c)  $\int_{\gamma} \frac{dz}{\text{sen } z^2} \quad \gamma : |z| = \frac{\pi}{2} \text{ en sentido negativo.}$

19. Sea  $G = \mathbb{C} - [-1, 1]$ . Se define en  $G$  la función  $f(z) = z^2 \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ .

a) Calcular  $\text{Res}(f, \infty)$ .

b) Utilizando el método de los residuos, calcular:

$$\int_C f(z) dz \quad \text{siendo } C : |z| = 2$$

20. Sea  $f$  una función holomorfa en  $\mathbb{C}_\infty - \{-1, 2\}$  tal que  $-1$  es un polo simple y  $2$  un polo doble. Se sabe además que:

$$- \text{Res}(f, -1) = 1 \quad \text{y} \quad \text{Res}(f, 2) = 2.$$

$$- f(0) = \frac{7}{4} \quad \text{y} \quad f(1) = \frac{5}{2}.$$

Determinar  $f$ , y calcular su desarrollo en serie de Laurent en potencias de  $z$  y su residuo en  $\infty$ .