Práctica 4
Series de funciones y de potencias

---

1. (*) Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones en los conjuntos indicados:

   a) $\dfrac{e^x}{x^n}$ en $(2,5]$ **b)** $\dfrac{e^x}{x^n}$ en $(1,+\infty)$ **c)** z^n en $|z|<1$

   d) $\dfrac{n}{n+1}z$ en $\mathbb{C}$ **e)** $\dfrac{n+1}{n^2+3}\operatorname{sen}(2nx-\pi)$ en $\mathbb{R}$

2. (*) Mostrar que $\dfrac{1}{1+nx}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $(0,1)$. Probar que esta sucesión converge uniformemente sobre todo intervalo $[a,b]\subset(0,1)$.

3. Sea $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números complejos. Probar

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge (absolutamente) si y sólo si las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}(z_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}(z_n)$ convergen (absolutamente).

   b) si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|z_n|.$$

4. **a)** Sea $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|<1$. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha^n$? Demostrarlo.

   b) Idem para $|\alpha|>1$. ¿Qué se puede decir en el caso $|\alpha|=1$?

   c) Probar que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$

   - converge si $|z|<1$
   - diverge si $|z|>1$.

5. **a)** Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n = \dfrac{z}{1-z}$ para $|z|<1$.

   b) Sea $z=re^{i\theta}$ con $0<r<1$. Usar **a)** para verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\theta)=\frac{r\cos\theta-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n\operatorname{sen}(n\theta)=\frac{r\operatorname{sen}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

6. Estudiar la convergencia de las series numéricas cuyo término general es:

a) $\dfrac{2i}{3^n}$	**b)** $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$	**c)** $\dfrac{2^n}{5^n - n}$
d) $\dfrac{1}{n!}$	**e)** $\dfrac{n}{n^n}$	**f)** $\dfrac{n}{n^2 - n}$
g) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$	**h)** $(-1)^n \dfrac{\log n}{n}$	**i)** $\dfrac{2^n}{n^n}$
j) i^n	**k)** $\dfrac{i^n}{n}$	**l)** $\dfrac{e^{in}}{n^2}$

- **Producto de Cauchy**

  Dadas las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, se llama **producto de Cauchy** de ambas a la serie de término general $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

  Si ambas series convergen, siendo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$, y al menos una de ellas lo hace absolutamente, entonces el producto de Cauchy converge a AB.

7. (*) Sean $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Verificar que $\sum a_n = \sum b_n$ convergen (condicionalmente) y que el producto Cauchy de ambas series diverge.

- **Criterio de Weierstrass**

  Sea X un espacio métrico y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniformemente en X.

- **Criterio de Dirichlet**

  Si $(a_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión decreciente de números reales positivos que converge a 0 y existe $M > 0$ tal que $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

8. Calcular el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias, y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia. Además, especifique las regiones asociadas a cada tipo de convergencia: convergencia condicional, absoluta, uniforme y no convergencia.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$ **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n} z^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i+1}{\sqrt{n}} (iz-2)^n$ **e)** $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n \ (a \in \mathbb{C})$ **f)** $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n \ (a \in \mathbb{C})$

---

g) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2}$ **h)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$ **i)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

j)† $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$

---

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$ **l)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n (z-i)^n}{4^n (n^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ **m)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$ **o)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^2} z^n$ **p)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1+(1+i)^n}$

9. Considere $a \in \mathbb{C} - \{0\}$ y una sucesión de reales positivos $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = 1$. Muestre que la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{a^n} (z - z_0)^n$$

tiene radio de convergencia $|a|$. Además analice las distintas regiones de convergencia, incluyendo que sucede en el borde de dicho disco, en los siguientes casos:

   (a) Si $\lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$.

   (b) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ es convergente.

   (c) Si $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ no es convergente, pero la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

10. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ es convergente sobre los puntos del borde de su disco de convergencia, pero que esto no es verdadero para la serie de las derivadas.

11. Observar que los conceptos de convergencia uniforme y absoluta son independientes, probando:

   a) La serie $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge absoluta pero no uniformemente en $|z| < 1$.

---

† Sobre el borde estudiar únicamente para $z = 1, i, -i$

b) La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{inx}}{n}$ converge uniformemente pero no absolutamente en $[\delta, 2\pi-\delta]$, $0<\delta<2\pi$.

c) La serie $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ converge absoluta y uniformemente en $|z|\leq 1$.

12. **a)** Determinar el conjunto de valores z para los cuales la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z^n+z^{n+1})$ converge y hallar su suma.

    b) Idem para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2+1)^n}$, $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n \quad$ y $\quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nz}$.

13. Hallar las regiones de convergencia y convergencia absoluta de las series:

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)z^n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$

    d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+|z|}$ **e)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$ **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}z^n}{(1+2i)^{n+2}(n+i)}$

14. **Exponencial**: Recuerde de prácticas anteriores la definición de la función exponencial:

$$e^z = e^x(cos(y) + isen(y))$$

    y considere la función $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

    a) Mostrar que h es entera y calcular su derivada.

    b) Probar que h cumple la propiedad exponencial: $h(z+w) = h(z)h(w)$.

    c) Probar que $e^z = h(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

15. **Funciones trigonométricas**

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

    a) Probar que $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ son enteras y calcular sus derivadas.

    b) Probar que

    i) $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

    ii) $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

    iii) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

    iv) $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$

v) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$
$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$

c) Verificar que ambas tienen período 2π.

d) i) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{sen} z = 0$.
ii) Idem para $\cos z$.
iii) Describir el conjunto $\{z \in \mathbb{C} / \cos z = 1\}$.

e Determinar si $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones acotadas.

16. (**) **Funciones hiperbólicas**

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad\qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

a) Verificar

i) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{sh} z$, $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$
ii) $\operatorname{sh}(iz) = i \operatorname{sen} z$, $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$
iii) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\operatorname{Re} z) \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sh}(\operatorname{Im} z) \cos(\operatorname{Re} z)$
$\cos z = \cos(\operatorname{Re} z) \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z) - i \operatorname{sh}(\operatorname{Im} z) \operatorname{sen}(\operatorname{Re} z)$

d) Estudiar la periodicidad de $\operatorname{sh} z$ y $\operatorname{ch} z$.

e) Hallar los ceros de ambas funciones.

f) Probar que las funciones hiperbólicas son enteras y hallar el desarrollo en serie de potencias de ambas funciones.

17. **Logaritmo**

a) Sea $A_{\theta_0} = \mathbb{C} - \{re^{i\theta_0} / r \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$

i) Pensar como definir adecuadamente un argumento continuo $Arg_{A_{\theta_0}}$ en el conjunto A_{θ_0}.
ii) Sea $f_{\theta_0} : A_{\theta_0} \to \mathbb{C}$ dada por $f_{\theta_0}(z) = \ln|z| + iArg_{A_{\theta_0}}$. Probar que es una rama del logaritmo.
iii) Caracterizar a todas las posibles ramas del logarítmo definidas en el conjunto A_{θ_0}.
iV) Ver que toda rama del logarítmo es holomorfa en A_{θ_0} y hallar su derivada.

e) Calcular: $\ln i$, $\ln 1$, $\ln(1+i)$, $e^{\ln i}$, considerando la rama del logarítmo definida por f_{θ_0} para $\theta_0 = 0, \pi$ y $3/2\pi$,

18. Sea f la rama principal de $\ln(1+z)$, y sea $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

a) Calcular el radio de convergencia de g.

b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$ para z dentro del círculo de convergencia de g.

c) Deducir que $f(z) = g(z)$ para $|z| < 1$.

19. Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ abierto conexo donde se tiene definida una rama del logarítmo $log : G \to \mathbb{C}$. Fijamos $b \in \mathbb{C}$, y consideramos la función $g : G \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = e^{blog(z)}$.

   a) Probar que si $b \in \mathbb{Z}$, entonces $g(z) = z^b$.

   b) Probar que la función g es holomorfa en G. Definimos $z^b = g(z)$, y la llamaremos rama de la exponencial z^b.

   c) Calcular i^i considerando la rama principal del logaritmo. Hallar los demás valores considerando las restantes ramas. Idem para : $(-1)^{\frac{3}{5}}$ y 1^{π}.

   d) Sea $G \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo, y sean $f, g : G \to \mathbb{C}$ ramas de z^a y z^b, respectivamente. ¿Es cierto que

      i) $f \cdot g$ es una rama de z^{a+b}?

      ii) f/g es una rama de z^{a-b}?

      iii) si $f(G), g(G) \subset G$, entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ son ramas de z^{ab}?

   e) Sea $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| < 4\}$. Calcular una rama de $(z-1)^{\frac{1}{3}}$ para $z \in G$