

## Práctica 3

### Derivabilidad - Ecuaciones de Cauchy - Riemann

1. Calcular la función derivada de las siguientes funciones:

a)  $f(z) = z$                       b)  $f(z) = z^2$                       c)  $f(z) = \frac{1}{z}$

2. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  derivable en  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

a) Calcular:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad ; \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

en términos de  $u$  y de  $v$ . ¿Qué se deduce?

b) Suponiendo que  $u$  y  $v$  son de clase  $C^2$ , calcular  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  y  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$  en  $z_0$ .

c) Calcular  $f'(z_0)$  en términos de  $u$  y de  $v$ .

3. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  derivable en  $z_0 = x_0 + iy_0$  y sea  $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ .

a) Probar que  $g$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ .

b) Calcular  $|f'(z_0)|$  y el jacobiano de  $Dg(x_0, y_0)$  en términos de  $u$  y de  $v$ .

c) ¿Es cierto que si  $f$  es abierta  $g$  también lo es? ¿Y el recíproco?

4. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  derivable en  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Probar que existe  $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}$ -lineal, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \alpha(h)}{h} = 0$$

#### • Regla de L'Hospital

Sean  $f, g$  funciones holomorfas en  $z_0$  tales que  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  y  $g'(z_0) \neq 0$ . Entonces:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

5. Calcular:

a)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1}$

c)  $\lim_{z \rightarrow e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z - e^{\frac{\pi i}{3}}}{z^3 + 1}$

b)  $\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z^2 + 4}{2z^2 + (3 - 4i)z - 6i}$

d)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 - 2iz + 1}{z^4 + 2z^2 + 1}$

6. Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Dar condiciones necesarias y suficientes sobre sus partes real e imaginaria de modo que resulte derivable en  $a \in \mathbb{R}$  y calcular  $\gamma'(a)$ . Calcular  $\gamma'(t)$  para  $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ .

7. Sean  $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|} \quad g(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & x + iy \neq 0, \\ 0 & x + iy = 0. \end{cases}$$

Demostrar que  $f, g$  son continuas en 0 y que cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann pero no son derivables.

8. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la función dada por

$$f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 y + i(x^2 y^2)}{x^4 + y^2} & x + iy \neq 0, \\ 0 & x + iy = 0. \end{cases}$$

- a) Verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en el  $(0, 0)$ .  
 b) Probar que  $f$  es derivable a lo largo de cualquier recta que pasa por  $(0, 0)$ , y que todas esas derivadas coinciden en el origen.  
 c) Probar que  $f$  no es derivable en  $z = 0$ .
9. a) Mostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares se escriben:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

b) Verificar que en coordenadas polares se tiene

$$f' = e^{-i\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{e^{-i\theta}}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - i \frac{\partial u}{\partial \theta} \right).$$

c) Calcular la derivada de  $f(z) = z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} (\cos \frac{m\theta}{n} + i \sin \frac{m\theta}{n})$

10. Determinar los puntos donde  $f$  es derivable y donde es holomorfa.

- a)  $f(z) = \begin{cases} \frac{x+iy}{x^2+y^2} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$
- b)  $f(z) = \bar{z}$
- c)  $f(z) = x^2 + iy^2$
- d)  $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2xy)$

11. Determinar si las siguientes funciones son holomorfas en los conjuntos especificados y, en caso de no serlo, encontrar un conjunto abierto en el que la función sea holomorfa o bien demostrar que no es holomorfa en ninguna parte.

- a)  $f(z) = \frac{3+2z}{i+2z}$  en  $D : |z| < 1$
- b)  $f(z) = \cos x$  en  $D : |z| < 1$
- c)  $f(z) = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$  en  $\mathbb{C}$
- d)  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  en  $\mathbb{C}$  ( $P, Q$  polinomios)
- e)  $f(z) = \frac{P(z) \cdot Q(z)}{z}$  en  $D : 0 < |z| < 1$  ( $P, Q$  polinomios)

12. Analizar dónde son holomorfas las siguientes funciones y hallar  $f'(z)$  en cada caso.

- a)  $f(z) = z^3 - 2z$
- b)  $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$
- c)  $f(z) = z^2 \cdot \bar{z}$
- d)  $f(z) = x^2 + iy^3$
- e)  $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$

13. Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto y conexo. Probar:

- a) Si  $f$  y  $\bar{f}$  son holomorfas en  $\Omega$ , entonces  $f$  es constante.
- b) Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $f' = 0$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  es constante en  $\Omega$ .
- c) Si  $f$  y  $g$  son holomorfas en  $\Omega$  y  $f' = g'$  en  $\Omega$ , entonces  $f - g$  es constante en  $\Omega$ .

¿Es necesaria la hipótesis de conexión?

14. Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa. Probar:

- a)  $\operatorname{Re}(f)$  constante  $\Rightarrow f$  constante.
- b)  $\operatorname{Im}(f)$  constante  $\Rightarrow f$  constante.
- c)  $|f|$  constante  $\Rightarrow f$  constante.
- d)  $\operatorname{Arg}(f)$  constante  $\Rightarrow f$  constante.

Piense en cómo generalizar estos resultados en un solo enunciado y trate de probarlo en el siguiente contexto. Si  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^1$ , decimos que la curva determinada en el plano complejo sus ceros mediante:

$$\mathfrak{C} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : G(x, y) = 0\}$$

es regular si  $\nabla(G)(x, y) \neq 0$  para todo punto  $(x, y) \in \mathfrak{C}$ . Deduzca qué propiedad debería tener una función holomorfa definida en un abierto conexo  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  si su imagen está contenida en la curva  $\mathfrak{C}$ .

15. Sea  $u(x, y) = e^{-x}(x \operatorname{sen} y - y \operatorname{cos} y)$ .
- Probar que  $u$  es armónica.
  - Encontrar  $v$  tal que  $f = u + iv$  sea holomorfa.
  - Hacer lo mismo para  $u(x, y) = 2x(1 - y)$
16. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto, y sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es conjugada armónica de  $u$  (en  $\Omega$ ) si  $f = u + iv$  es holomorfa en  $\Omega$ .
- Probar que si  $v$  y  $\tilde{v}$  son conjugadas armónicas de  $u$  en  $\Omega$ , entonces  $v$  y  $\tilde{v}$  difieren en una constante aditiva. ¿Falta alguna hipótesis?
  - Probar que si  $u$  y  $v$  son mutuamente conjugadas armónicas, entonces son constantes. ¿Falta alguna hipótesis?
17. a) Hallar todas las funciones holomorfas de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  tales que su parte real es  $x^2 - y^2$ .
- b) Hallar el polinomio armónico más general entre los de la forma:

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

Encontrar además la función armónica conjugada y la correspondiente función holomorfa.

- Encontrar una función  $f$  holomorfa en todo el plano complejo cuya parte real sea  $e^x(x \operatorname{cos} y - y \operatorname{sen} y)$ .
  - Mostrar que  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$  es armónica. Indicar su dominio de armonicidad y hallar una función holomorfa que tenga a  $f$  como parte imaginaria.
  - Dada  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  se sabe que  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $u(x, y) = F(xy)$  es armónica en  $\mathbb{R}^2$ . ¿Cómo debe ser  $F$ ?
18. Demostrar que si  $f$  es holomorfa en un abierto conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$  y  $f(z) \cdot \overline{f(z)} \neq 0$  para todo  $z \in \Omega$ , entonces  $g(z) = \log |f(z)|$  es armónica en  $\Omega$ . Deduzca que, sin embargo, si  $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$  y  $f(z) = z$  no tiene conjugada armónica ¿En qué tipo de conjuntos  $f$  si admitiría una conjugada armónica? ¿Cuales serían tales conjugadas?