Matemática 2 - Primer Cuatrimestre 2018

Práctica 8 - Forma de Jordan

Notación: Si $A \in K^{n\times n}$, entonces $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$.

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico y el polinomio minimal de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Determinar la forma y una base de Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Para una matriz A notamos $m_A(t)$ a su polinomio minimal.

a) Si $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ es tal que $m_A(t) = t^3$, determinar las posibles formas de Jordan de A.

b) Si $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ es nilpotente y tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, ¿cuántos bloques tiene la forma de Jordan de A? ¿Y si $A \in \mathbb{C}^{16\times 16}$ con $\mathrm{rg}(A) = 9$?

Ejercicio 4. Sea $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ tal que $m_A(t) = t^6$, y sea $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ una base de Jordan para A. Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2, A^3, A^4 y A^5.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Mostrar que $N = A - 2\,\mathrm{Id}$ es nilpotente.

b) Hallar una base de Jordan de N, y luego, de A.

c) Calcular A^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.

d) Calcular e^A.

Ejercicio 6. Decidir si las matrices siguientes son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Calcular para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^n.$$