Matemática 2 - Primer Cuatrimestre 2018

Práctica 5 - Diagonalización

Ejercicio 1. Para las matrices A siguientes, calcular el polinomio característico, los autovalores y bases y dimensiones de los espacios de autovectores correspondientes a cada autovalor (analizar por separado los casos $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$). En cada caso decidir si la matriz es diagonalizable, y de ser posible, exhibir una matriz P inversible tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Como en el ejercicio anterior, discutiendo según los valores de los parámetros $a,b,c \in \mathbb{R}$ (analizar por separado los casos $K=\mathbb{R}$ y $K=\mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz sea diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & k+k^2 & -k^2 \\ 0 & k+1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que para toda fila F_i, la suma de sus coeficientes es igual a 1. Probar que 1 es autovalor de A y encontrar un autovector correspondiente.

Ejercicio 5. Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

Ejercicio 6. Calcular A^n para todo $n \in \mathbb{N}$ para las siguientes matrices A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Determinar en cada caso si es posible encontrar $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $B^2 = A$. ¿Y en $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x,y,z) = (-7y+z, 4y, -2x+y+3z).$$

a) Encontrar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

b) Calcular $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n veces), $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Hallar, si es posible, una transformación lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $g \circ g = f$.

Ejercicio 8. Se define una sucesión de números enteros de la siguiente manera:

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 2 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n,\ \forall\ n \geq 0.$$

a) Determinar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que para todo $n \geq 0$

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

b) Usando lo anterior mostrar que para todo $n \geq 0$ se tiene

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Diagonalizando la matriz A determinar el valor de a_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 9. Encontrar una fórmula general para x_n e y_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, en función de x_0 e y_0 (ecuaciones en diferencias):

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & 6\,x_n + 2\,y_n \\ y_{n+1} & = & 2\,x_n + 3\,y_n \end{cases}.$$

Ejercicio 10. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ con autovalores $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{5}$. Para un vector inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, se define $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$. Probar que para todo $x^{(0)}$ se cumple $x^{(n)} \to 0$ (es decir, $x_i^{(n)} \to 0$, $1 \leq i \leq 3$).

Ejercicio 11. Supongamos que en cierta especie hay una epidemia en la que al cabo de cada mes se enfermó la mitad de los que están sanos a principios de mes y murió la cuarta parte de los que estaban enfermos. Llamemos x_k al número de muertos al cabo del k- ésimo mes, y_k al número de enfermos al cabo del k-ésimo mes y z_k al número de sanos al cabo del k-ésimo mes.

1. Determinar $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que describa el proceso, o sea tal que

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

2. Si la distribución original (x_0, y_0, z_0) al principio del primer mes (o término del mes 0) es $(0, 0, 10000)$, o sea de ningún enfermo y 10000 sanos, calcular el número de enfermos al cabo del k-ésimo mes.

3. Probar que cualquiera sea la distribución original (x_0, y_0, z_0), (x_k, y_k, z_k) tiende a un múltiplo de $(1, 0, 0)$ (determinarlo en función de (x_0, y_0, z_0)), es decir mueren todos (lo cual es obvio ya que se enferman o se mueren pero ni se curan ni nacen nuevos individuos en el modelo).

Ejercicio 12. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

1. $\begin{cases} x'(t) &= 8x(t) + 10y(t) \\ y'(t) &= -5x(t) - 7y(t) \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x'(t) &= 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$, con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.

Ejercicio 13. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

a) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.