

Matemática 2 - Primer Cuatrimestre 2018

Práctica 4 - Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determinar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$

b) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, considerando a \mathbb{C} como \mathbb{C} -espacio vectorial y como \mathbb{R} -espacio vectorial.

c) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

d) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $f \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

e) $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p(0), p'(0), p''(0))$

Ejercicio 2. Interpretar geoméricamente las siguientes transformaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

a) $f(x, y) = (x, 0)$

b) $f(x, y) = (x, -y)$

c) $f(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$, con $t \in \mathbb{R}$ fijo.

Ejercicio 3. Probar que las siguientes funciones son transformaciones lineales:

a) $\text{tr} : K^{n \times n} \rightarrow K$, $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

b) $f : K^{n \times m} \rightarrow K^{r \times m}$, $f(A) = BA$ donde $B \in K^{r \times n}$ está dado

c) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$

d) $\Phi : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$, $\Phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$

e) $\epsilon_\alpha : K[X] \rightarrow K$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$, donde $\alpha \in K$

Ejercicio 4.

a) Mostrar que existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (-5, 3)$ y $f(-1, 1) = (5, 2)$, y que es única. Para dicha f , determinar $f(5, 3)$ y $f(-1, 2)$.

b) ¿Existe una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(1, 1) = (2, 6)$; $f(-1, 1) = (2, 1)$ y $f(2, 7) = (5, 3)$?

c) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (1, 2, 1), & f(2, 1, 0) &= (2, 1, 0), & f(-1, 0, 0) &= (1, 2, 1), \\ g(1, 1, 1) &= (1, 1, 0), & g(3, 2, 1) &= (0, 0, 1), & g(2, 2, -1) &= (3, -1, 2). \end{aligned}$$

Determinar si $f = g$.

- d) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $f(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $f(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

Ejercicio 5.

- a) Calcular el núcleo y la imagen de cada una de las transformaciones lineales de los ejercicios 1 y 2. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1} .
- b) Clasificar las transformaciones lineales tr y ϵ_α del Ejercicio 2 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 6. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 + x_3 - x_4)$$

Calcular $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$, y determinar el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 6)\}$.

Ejercicio 7. Sea $S = \langle (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\text{Nu}(f) = S$.

Ejercicio 8.

- a) ¿Existe $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ epimorfismo? ¿Y un epimorfismo $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$?
 ¿Existe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ monomorfismo?
 ¿Y un monomorfismo $f : \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \text{tr}(A) = 0\} \rightarrow \{g \in \mathbb{R}_3[X] : g(1) = g'(1) = 0\}$?
- b) ¿Existe alguna t.l. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\} \subset \text{Im}(f)$?
- c) ¿Existe algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$, donde $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0\}$?

Ejercicio 9. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ que satisfice $\text{Nu}(f) = S$ e $\text{Im}(f) = T$ en los siguientes casos:

- a) $S = \langle (1, 2, 1) \rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$,
- b) $S = \langle (1, -2, 1) \rangle$, $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$.

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido

- a) $(1, 1, 0) \in \text{Nu}(f)$ y $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.
- b) $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \langle (1, 1, 2) \rangle$.
- c) $\text{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\text{Nu}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.
- d) $f \neq 0$ y $\text{Nu}(f) \subseteq \text{Im}(f)$.

Ejercicio 11. Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix} \text{ para cada } k \in \mathbb{R} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 12. Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2)$. Determinar el núcleo y la imagen de f , de g y de $g \circ f$, y decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 13. En cada uno de los siguientes casos definir una t.l. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga lo pedido

a) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$.

b) $f \neq \text{Id}$ y $f \circ f = \text{Id}$.

Ejercicio 14.

a) Para $t = \pi$ en el Ejercicio 2.c), calcular f^2 .

b) Hallar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \neq \text{Id}$, tal que $f^3 = \text{Id}$.

c) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A \neq \text{Id}$, tal que $A^3 = \text{Id}$. ¿Y en $\mathbb{R}^{3 \times 3}$?

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_2 + 2x_3, x_1 - x_2, x_1 - x_2)$$

y sean las bases $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

a) Calcular $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

b) Calcular $\text{Nu}(f)$ e $\text{Im}(f)$.

c) Calcular las matrices inversibles $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ y $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = Q[f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}'}P$ donde \mathcal{E} y \mathcal{E}' son las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 respectivamente. ¿Cuáles son?

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + x_3).$$

a) Determinar bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 tales que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Si A es la matriz de f en la base canónica, calcular su rango y encontrar matrices inversibles Q y P tales que $QAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) ¿Existe una base \mathcal{B}' de \mathbb{R}^3 para la cual $[f]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 17. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de \mathbb{R}^4 . Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base \mathcal{B}' ?
- Hallar una base de $\text{Nu}(f)$ y una base de $\text{Im}(f)$.
- Describir el conjunto $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = w_1 - 3w_3 - w_4\}$.

Ejercicio 18. Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3),$$

- Calcular $[f]_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$.
- Verificar que f es un isomorfismo.
- Exhibir una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{E}}P$. ¿Cuál es?

Ejercicio 19. Para las siguientes $f : V \rightarrow V$, calcular $[f]_{\mathcal{E}}$, donde \mathcal{E} es la base canónica

- $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $\mathcal{E} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$.
- $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $f(A) = A^t$, $\mathcal{E} = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$.

Ejercicio 20. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$. Probar que f es un proyector (i.e. $f \circ f = f$) y encontrar una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 en la cual $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21. En cada uno de los siguientes casos construir, si es posible, un proyector $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpla lo pedido

- $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (-2, 1, 1) \rangle$
- $\text{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3) / 3x_1 - x_3 = 0\}$ e $\text{Im}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle$

y en caso que sea posible encontrar una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 tal que $[f]_{\mathcal{B}}$ sea una matriz diagonal con solo 1 o 0 en la diagonal.