Matemática 2 - Primer Cuatrimestre 2018

Práctica 2 - Determinantes

Ejercicio 1. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2. Sea $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ con $\det(A) = 8$. Calcular $\det(3A)$ y $\det(-A)$.

Ejercicio 3. Demostrar, sin calcular, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x & y & 2x+3y \\ 4 & 3 & 17 \\ z & t & 2z+3t \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 a & 1 & \cos^2 a \\ \operatorname{sen}^2 b & 1 & \cos^2 b \\ \operatorname{sen}^2 c & 1 & \cos^2 c \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Si A es una matriz inversible tal que tanto A como A^{-1} tienen sus coeficientes enteros, ¿por qué ambos determinantes deben dar 1 o -1?

Ejercicio 6. Demostrar que las raíces de la ecuación $\det \begin{pmatrix} \lambda - a & b \\ b & \lambda - c \end{pmatrix} = 0$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$ dados, y la variable λ, son reales.

Ejercicio 7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que A es inversible y en esos casos hallar la inversa.

Ejercicio 8. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Si $\det(A) = 3$, calcular el determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, probar que no existe ninguna matriz $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible que satisface que $C\,B = A\,C$. ¿Y si no se pide que C sea inversible?

Ejercicio 10. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

y sea $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ cualquiera. ¿Puede el sistema de ecuaciones lineales $A\,x = b$ tener una única solución?

Ejercicio 11. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} -x + a\,y + z & = & a \\ -x + (1-a)z & = & 1 \\ -x + y + z & = & a^2 \end{cases}$$

una única solución? Resolver el sistema para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 12. Encontrar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = x$ admite una solución no nula, para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13.

a) Calcular el área del triángulo con vértices en el $(0,0)$, $(2,2)$ y $(-1,3)$.

b) Calcular el volumen del paralelepípedo con 4 vértices en $(0,0,0)$, $(-1,2,2)$, $(2,-1,2)$ y $(2,2,-1)$. ¿Cuáles son sus otros vértices?

Ejercicio 14. Sean $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ y la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & \ldots & r_1^n \\ 1 & r_2 & r_2^2 & \ldots & r_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & r_n & r_n^2 & \ldots & r_n^n \\ 1 & X & X^2 & \ldots & X^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

a) Si se piensa $\det(A_n) \in \mathbb{R}_n[X]$, ¿cuáles son sus raíces?

b) Calcular $\det(A_2)$.