

Matemática 2 - Primer Cuatrimestre 2018

Práctica 1 - Repaso de matrices y de sistemas de ecuaciones lineales

En todas las prácticas, $K = \mathbb{R}$ (los números reales) o \mathbb{C} (los números complejos).

Ejercicio 1. Para los siguientes $z \in \mathbb{C}$, hallar $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, \bar{z} , $|z|$, z^{-1} y $\operatorname{Re}(-iz)$.

$$\begin{array}{ll} a) z = (2+i)(1+3i) & c) z = (\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2 (1-3i) \\ b) z = 5i(1+i)^4 & d) z = i^{17} + \frac{1}{2}i(1-i)^3 \end{array}$$

Ejercicio 2. Hallar todas las soluciones en \mathbb{R} y en \mathbb{C} de las siguientes ecuaciones.

$$\begin{array}{lll} a) x^2 = 5 & c) x^2 = -5 & e) x^2 - 2x + 2 = 0 \\ b) x^2 + 1 = 0 & d) \frac{1}{2}x^2 + x = 4 & f) x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \end{array}$$

Ejercicio 3. Cuando sea posible, calcular $A+2B$, AB y BA . ¿Vale la igualdad entre estos productos?

$$\begin{array}{ll} a) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & c) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, & d) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Ejercicio 4. Exhibir matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $B \neq 0$, tales que $A^2 = -\operatorname{Id}$ y $B^2 = 0$.

Ejercicio 5. En cada caso, mostrar con un ejemplo que existen matrices A, B y $C \in K^{n \times n}$, con $n = 2$, para las cuales vale lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} a) (AB)^2 \neq A^2B^2, & d) AB = 0 \not\Rightarrow BA = 0, \\ b) AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0, & e) A^j = 0 \text{ para algún } j \geq 2 \not\Rightarrow A = 0, \\ c) AB = AC \text{ y } A \neq 0 \not\Rightarrow B = C, & f) (A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2. \end{array}$$

Ejercicio 6. Si A es una matriz con una fila de ceros, ¿es cierto que para toda matriz B , AB tiene una fila de ceros? (siempre que AB esté definido.) ¿Vale lo mismo con columnas?

Ejercicio 7. Probar que si $A, B \in K^{n \times n}$ satisfacen que $Ax = Bx, \forall x \in K^n$, entonces $A = B$.

Ejercicio 8. Sea $A \in K^{n \times n}$ una matriz invertible y sean $B, C \in K^{n \times m}$. Probar:

$$\begin{array}{ll} a) AB = AC \Rightarrow B = C & b) AB = 0 \Rightarrow B = 0. \end{array}$$

Ejercicio 9. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa para matrices $A, B \in K^{n \times n}$. Justificar:

$$\begin{array}{ll} a) A, B \text{ invertibles} \Rightarrow A+B \text{ invertible}, & \\ b) A \text{ nilpotente (es decir, } \exists j \in \mathbb{N} / A^j = 0) \Rightarrow A \text{ no es invertible.} & \end{array}$$

Ejercicio 10. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobre \mathbb{R} , y los sistemas homogéneos asociados.

$$a) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & -1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 & = & 4 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Verificar que en cada caso, el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual a una solución particular más el conjunto de soluciones del homogéneo asociado.

Ejercicio 11. Encontrar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 0)$.

Ejercicio 12. Resolver sobre \mathbb{C} los sistemas

$$a) \begin{cases} ix_1 - (1+i)x_2 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2ix_2 - x_3 & = & 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x_1 + (-1+i)x_2 + x_4 & = & 2 \\ -x_1 + 3x_2 - 3ix_3 + 5x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Ejercicio 13. Determinar los valores de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ para los cuales el siguiente sistema tiene solución:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & \alpha \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & \beta \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & \gamma \end{cases}$$

Ejercicio 14. Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ cada uno de los sistemas siguientes tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones. En el caso de los sistemas homogéneos, si la solución es única, ¿cuál es?

$$a) \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 & = & 0 \\ (a+1)x_2 + x_3 & = & 0 \\ (a^2-4)x_3 & = & 0 \end{cases} \quad c) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 & = & b \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = & -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + ax_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + ax_2 + ax_3 & = & 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + ax_3 & = & 1 \\ ax_1 + (a+4)x_2 + 3ax_3 & = & -2 \\ -ax_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \\ (a+2)x_2 + (3a+1)x_3 & = & b \end{cases}$$

Ejercicio 15. Decidir si (o cuándo) las siguientes matrices son inversibles y, en caso afirmativo, exhibir sus inversas:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad e) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad f) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$