Teorema de Compacidad

Sea Γ un conjunto de fórmulas de la lógica proposicional. Entonces Γ es satisfactible si y sólo si todo subconjunto finito de Γ es satisfactible.

Demostración. Es claro que si Γ es satisfactible entonces todo subconjunto de Γ es satisfactible, en particular la propiedad se cumple para los subconjuntos finitos. Para demostrar la otra implicación diremos que un conjunto de fórmulas R es *finitamente satisfactible* si todo subconjunto finito de R es satisfactible. Asumamos entonces que Γ es finitamente satisfactible. Nuestro objetivo es probar que Γ es satisfactible. Probemos primero el siguiente resultado auxiliar: si α es una fórmula entonces $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es finitamente satisfactible o bien $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es finitamente satisfactible. En efecto, supongamos por el absurdo que ninguno de estos conjuntos sea finitamente satisfactible. Luego existen conjuntos finitos e insatisfactibles Γ_1, Γ_2 tales que $\Gamma_1 \subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$ y $\Gamma_2 \subseteq \Gamma \cup \{\neg\alpha\}$. Como $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es finito entonces por hipótesis sabemos que $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \Gamma$ es satisfactible. Sea v una valuación que satisface a $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \Gamma$. Si $v(\alpha) = 1$ entonces v satisface a Γ_1 ya que si $\beta \in \Gamma_1$ entonces $\beta = \alpha$ o bien $\beta \in \Gamma_1 \cap \Gamma \subseteq (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \Gamma$. Análogamente si $v(\neg\alpha) = 1$ entonces v satisface a Γ_2. En ambos casos llegamos a una contradicción ya que Γ_1 y Γ_2 son insatisfactibles. Luego $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es finitamente satisfactible o bien $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es finitamente satisfactible. A partir de este resultado definimos inductivmente la siguiente sucesión de conjuntos: $\Gamma_0 = \Gamma$ y si $n \in \mathbf{N}$, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{p_n\}$ si $\Gamma_n \cup \{p_n\}$ es finitamente satisfactible y $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg p_n\}$ si $\Gamma_n \cup \{\neg p_n\}$ es finitamente satisfactible. Como Γ_0 es finitamente satisfactible inferimos del resultado auxiliar que Γ_n es finitamente satisfactible para todo $n \in \mathbf{N}$. Sea $\hat{\Gamma} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Como $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$ para todo n entonces es claro que $\hat{\Gamma}$ es finitamente satisfactible. Afirmamos que $\hat{\Gamma}$ es satisfactible. En efecto observemos que si p_n es una variable proposicional, entonces $p_n \in \hat{\Gamma}$ o bien $\neg p_n \in \hat{\Gamma}$ pero no pueden estar p_n y $\neg p_n$ simultáneamente ya que $\hat{\Gamma}$ es finitamente satisfactible. Sea v la valuación que asigna el valor 1 a la variable p_n si $p_n \in \hat{\Gamma}$ y $v(p_n) = 0$ si $\neg p_n \in \hat{\Gamma}$. Veamos que v satisface a $\hat{\Gamma}$. Para probar esto sea $\alpha \in \hat{\Gamma}$. Supongamos por el absurdo que $v(\alpha) = 0$. Como el conjunto de variables proposicionales que aparecen en α es finito, entonces existe $n \in \mathbf{N}$ tales que las variables de α están contenidas en $\{p_0, \ldots, p_n\}$. Por otro lado tenemos que $\alpha \cup \{\varepsilon_0 p_0, \ldots, \varepsilon_n p_n\}$ es un subcontunto finito de $\hat{\Gamma}$ donde para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\varepsilon_i p_i$ coincide con p_i si $p_i \in \hat{\Gamma}$ y $\varepsilon_i p_i$ coincide con $\neg p_i$ si $\neg p_i \in \hat{\Gamma}$. Como $\hat{\Gamma}$ es finitamente satisfactible tenemos que existe una valuación w que satisface a $\alpha \cup \{\varepsilon_0 p_0, \ldots, \varepsilon_n p_n\}$. Por construcción tenemos que v y w coinciden en las variables $p_0, \ldots, p_n$ y en particular coinciden en las variables que aparecen en α. Luego $v(\alpha) = w(\alpha)$ lo que es imposible pues $v(\alpha) = 0$ y $w(\alpha) = 1$. Por lo tanto v satisface a $\hat{\Gamma}$ y en particular satisface a $\Gamma = \Gamma_0$ pues $\Gamma \subseteq \hat{\Gamma}$. $\square$