

Lógica y computabilidad
Práctica 9: Teoría de computabilidad

- 1) Para cada n indicado, hallar el programa $\mathcal{P}$ tal que $\#\mathcal{P} = n - 1$.
 a) $n_0 = 2^{22} \cdot 3^{37} \cdot 5^{94} \cdot 7^{78}$
 b) $n_1 = 2^{45} \cdot 5^{46} \cdot 13^{219} \cdot 19^{222} \cdot 33^2$ (Cuidado con los factores no primos o los factores primos omitidos).

- 2) En base a lo hallado en el punto anterior, realizar los siguientes cálculos.
 a) $\Phi_{n_0}(0)$ (es decir, $\Phi_{n_0}^{(1)}(0)$, o bien $\Phi^{(1)}(0, n_0)$).
 b) $\Phi_{n_0}(2)$. ¿Cuál es el conjunto $\{x \in \mathbb{N}_0 : \Phi_{n_0}(x) \downarrow\}$?
 c) $\Phi_{n_0}^{(2)}(0, 5)$ (es decir, $\Phi^{(2)}(0, 5, n_0)$).
 d) $\Phi_{n_1}^{(2)}(1, 2)$
 e) $\Phi_{n_1}(5)$

- 3) Probar que una función total $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ es computable si y sólo si su gráfico

$$\text{gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0^2 : y = f(x)\}$$

es recursivo (computable).

- 4) Sea $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ una función computable y suryectiva. Probar que existe una función computable e inyectiva $g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $g(f(x)) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{N}_0$.

- 5) Sea el predicado binario

$$\text{HALT}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = \#(\mathcal{P}) \wedge \psi_{\mathcal{P}}^{(1)}(x) \downarrow \\ 0 & \text{si } y = \#(\mathcal{P}) \wedge \psi_{\mathcal{P}}^{(1)}(x) \uparrow. \end{cases}$$

Probar que el predicado unario $P(x) = \text{HALT}(x, x)$ no es computable.

- 6) Sea $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ una función computable biyectiva. Probar que $\text{HALT}(f(x), x)$ no es computable. (Sugerencia, considerar la función:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Phi(x, f^{-1}(x)) \uparrow \\ \uparrow & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- 7) Sea f una función parcialmente computable. Decidir si la siguiente función es parcialmente computable:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{Dom} f \\ \uparrow & \text{si } x \notin \text{Dom} f. \end{cases}$$

8) Probar que la siguiente función es parcialmente computable:

$$f(x) = \begin{cases} \Phi(x, x) + 1 & \text{si } \Phi(x, x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

9) Probar que existe una función recursiva primitiva $g(u, v, w)$ tal que

$$\Phi_z^{(3)}(u, v, w) = \Phi_{g(u, v, w)}(z).$$

10) a) Sea f la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Phi_x(x) \downarrow \\ \uparrow & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probar que f es parcialmente computable y que existe una función unaria h recursiva primitiva tal que

$$f(x, y) = \Phi_{h(x)}(y).$$

b) Probar que $\Phi_{h(x)}$ es una función constante si y sólo si $\Phi_x(x)$ está definida.

c) Probar que el conjunto

$$B = \{x \in \mathbb{N}_0 : \Phi_x \text{ es una función constante}\}$$

no es recursivo.

11) Probar que la siguiente función no es computable:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ está en la imagen de } \Phi_x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

12) Se dice que f es una extensión de g si y sólo si $g(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de g . Probar que existe una función parcialmente computable g_0 tal que para toda función recursiva f , f no es una extensión de g_0 .

13) Probar que existen funciones unarias g parcialmente computables para las cuales la función f definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = y \\ 0 & \text{si } g(x) \neq y \end{cases}$$

no es computable.

- ¿Qué se puede decir de f si g es (totalmente) computable?
- 14) Probar que el conjunto $\{x \in \mathbb{N}_0 : \text{Dom}(\Phi_x) = \emptyset\}$ no es recursivo de dos maneras distintas:
- Usando el teorema de Rice.
 - Sin usar el teorema de Rice.
- 15) Probar que los siguientes conjuntos no son recursivos:
- $\{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : y \in \text{rango de } \Phi_x\}$.
 - $\{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : \Phi_x = \Phi_y\}$.
 - $\{x \in \mathbb{N}_0 : \text{rango de } \Phi_x \text{ es infinito}\}$.
- 16) Probar que todo conjunto recursivamente enumerable infinito contiene un subconjunto recursivo infinito.
- 17) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:
- Si B es recursivamente enumerable, entonces B es recursivo o $\overline{B}$ es recursivo.
 - Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es una familia numerable de conjuntos recursivamente enumerables, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ es recursivamente enumerable.
- 18) Probar que si B es recursivamente enumerable y f es una función parcialmente computable entonces $f^{-1}(B)$ es recursivamente enumerable.
- 19) Probar que el conjunto $B = \{x \in \mathbb{N}_0 : \Phi_x(0) = 1\}$ es recursivamente enumerable.
- 20) Decidir si los siguientes conjuntos son recursivamente enumerables:
- $\{x \in \mathbb{N}_0 : \Phi_x(0) \downarrow\}$.
 - $\{x \in \mathbb{N}_0 : \Phi_x(x) \downarrow\}$.
 - $\{x \in \mathbb{N}_0 : \text{dominio de } \Phi_x = \emptyset\}$.
- 21) Probar que B es recursivamente enumerable e infinito si y sólo si existe una función $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ inyectiva y recursiva cuyo rango sea B .
- 22) Probar que $B = \{x \in \mathbb{N}_0 : 1 \in \text{Dom } \Phi_x\}$ es recursivamente enumerable.