Lógica y computabilidad

Práctica 6: ***Modelos y árboles en lenguajes de primer orden.***

1) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, con un símbolo de función binario f y un símbolo de constante c.

Dadas las siguientes interpretaciones:

- $\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, \cdot, 1)$
- $\mathcal{I}_2 = (\mathbb{Z}, \cdot, 1)$
- $\mathcal{I}_3 = (\mathbb{Q}, \cdot, 1)$

encontrar enunciados ϕ y α tales que

- $\mathcal{I}_1$ sea modelo de ϕ,
- $\mathcal{I}_2$ sea modelo de α pero no de ϕ, y
- $\mathcal{I}_3$ no sea modelo de α.

2) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario f. Sean α y β los siguientes enunciados de $\mathcal{L}$:

$$\alpha = \forall x \exists y \big(f(y) = x\big),$$

$$\beta = \forall x \forall y \Big(\big(f(x) = f(y)\big) \rightarrow (x = y)\Big)$$

Hallar dos interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ tales que $\mathcal{I}_1$ sea modelo de α y no de β e $\mathcal{I}_2$ sea modelo de β pero no de α.

3) Dar un enunciado ϕ de primer orden en el lenguaje $\{\leq, =\}$, tal que $M_1 \models \phi$ y $M_2 \not\models \phi$, donde:

- $M_1 = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \leq)$, siendo $a \leq e, e \leq g, b \leq e, c \leq f, d \leq f, f \leq g$;
- $M_2 = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \leq)$, siendo $a \leq d, b \leq d, c \leq d, d \leq g, e \leq g, f \leq g$.

4) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y con un símbolo de función unario f. Sean $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ e $\mathcal{I}_3$ las siguientes interpretaciones de $\mathcal{L}$:

$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{R}, f_1)$, donde $f_1(x) = x^2$.

$\mathcal{I}_2 = (\mathbb{R}, f_2)$, donde $f_2(x) = x^2 + 1$.

$\mathcal{I}_3 = (\mathbb{N}, f_3)$, donde $f_3(x) = x^2 + 2$.

Encontrar dos fórmulas α_i de $\mathcal{L}$, $i = 1, 2$, tales que $\mathcal{I}_i$ sea modelo de α_i pero que $\mathcal{I}_{i+1}$ no lo sea, con $i = 1, 2$.

5) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario. Encontrar fórmulas α y β tales que:

a) α sea válida en $(\mathbb{Z}, +)$ y no en $(\mathbb{N}, +)$.

b) β sea válida en $(\mathbb{C}, \cdot)$ pero no en $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Definición: Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden e $\mathcal{I}$ una interpretación. Decimos que un elemento de $a \in U_{\mathcal{I}}$ es *distinguible* si y solo si existe una fórmula de $\mathcal{L}$ con una sola variable libre x, digamos $\varphi(x)$, que «solo es verdadera cuando $x = a$».

Más precisamente, si $\bar{c}$ es un símbolo de constante que no está en $\mathcal{L}$, consideramos el lenguaje $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\bar{c}\}$ y la interpretación ampliada $\mathcal{I}'$ que agrega a $\mathcal{I}$ una interpretación $\bar{c}_{\mathcal{I}'}$ para $\bar{c}$ y mantiene las interpretaciones de $\mathcal{I}$ para los símbolos de $\mathcal{L}$. Luego, decimos que $a \in U_{\mathcal{I}}$ es distinguible si y solo si existe $\varphi(x)$, una fórmula de $\mathcal{L}$ (y por tanto de $\mathcal{L}'$), tal que

$$U_{\mathcal{I}'} \text{ es un modelo de } \varphi(x/\bar{c}) \quad\iff\quad \bar{c}_{\mathcal{I}'} = a.$$ [1]

6) Verificar que si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden con un símbolo de igualdad:

a) si c es un símbolo de constante de $\mathcal{L}$, entonces $c_{\mathcal{I}}$ es un elemento distinguible de $U_{\mathcal{I}}$.

b) si $a \in U_{\mathcal{I}}$ es la interpretación que da $\mathcal{I}$ a un término sin variables de $\mathcal{L}$, entonces a es un elemento distinguible de $U_{\mathcal{I}}$

c) Dar un ejemplo de un lenguaje $\mathcal{L}$ y una interpretación $\mathcal{I}$ de dicho lenguaje con universo infinito, tal que todo elemento de $U_{\mathcal{I}}$ sea distinguible.

7) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las interpretaciones

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +), \quad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot),$$

[1] La dificultad técnica en esta definición, que obliga a ampliar el lenguaje $\mathcal{L}$ y la interpretación $\mathcal{I}$, es que para que la sustitución $x/\bar{c}$ funcione adecuadamente, $\bar{c}$ no debe aparecer en $\varphi(x)$; es decir, $\bar{c}$ solo aparece en $\varphi(x/\bar{c})$ a causa de la sustitución $x/\bar{c}$.

donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

8) Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles:

a) $\big(\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \leq\big)$, donde:

$$x_1 < x_2, \quad x_1 < x_3, \quad x_2 < x_4, \quad x_3 < x_4,$$

$$x_3 < x_5, \quad x_4 < x_6 \quad \text{y} \quad x_5 < x_6.$$

b) $\big(\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \leq\big)$, donde:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4, \quad a_2 \leq a_5.$$

9) Probar que si el universo de una interpretación es finito con n elementos ($n > 1$) y tiene la propiedad de que $n-1$ elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

Definición. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Dos interpretaciones $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ de $\mathcal{L}$ se dicen *isomorfas* si existe una biyección entre sus universos

$$\phi\colon U_{\mathcal{I}_1} \to U_{\mathcal{I}_2}$$

con las siguiente propiedades:

- para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada símbolo de predicado n-ario P del lenguaje, se cumple

$$(a_1, \ldots, a_n) \in P_{\mathcal{I}_1} \quad \Longleftrightarrow \quad (\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)) \in P_{\mathcal{I}_2};$$

- para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada símbolo de función n-ario f del lenguaje, vale

$$\phi(f_{\mathcal{I}_1}(a_1, \ldots, a_n)) = f_{\mathcal{I}_2}(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n));$$

- y para cada símbolo de constante c del lenguaje, se tiene

$$\phi(c_{\mathcal{I}_1}) = c_{\mathcal{I}_2}.$$

10) Decidir en cada caso si $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ son interpretaciones isomorfas en los lenguajes dados:

a) $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario.

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +), \quad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot).$$

b) $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de predicado binario.

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, <), \quad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, >).$$

c) $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de predicado binario.

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, <), \quad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{Z}, <).$$

d) $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de predicado binario.

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, <), \quad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \leq).$$

e) $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad, un símbolo de función binario y un símbolo de constante c.

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, \cdot, 2), \quad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot, 3).$$

11) Decidir si las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$\begin{aligned} \alpha &= \forall x \exists y \big(P(x,y) \to P(y,x)\big) \\ \beta &= \forall x \exists y \big(P(x,y) \to \exists z P(z,x)\big). \end{aligned}$$

12) Probar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

a) $\big(\exists y P(y) \to \forall x \exists y P(y)\big)$.

b) $\big(\exists y P(y) \to \exists y \exists x P(y)\big)$.

c) $\big(\forall x P(x) \to P(t)\big)$, donde t es un término sin variables.

d) $\big(\forall x \forall y Q(x,y) \to \forall y Q(y,y)\big)$.

e) $\big(P(t) \to \exists x P(x)\big)$, donde t es un término sin variables.

f) $\Big(\forall x Q\big(x, f(x)\big) \to \forall x \exists y Q(x,y)\Big)$.

13) Probar:

a) Si ϕ es universalmente válida, entonces $\forall x \phi$ también lo es.

b) Si ψ y $(\psi \to \phi)$ son universalmente válidas, entonces ϕ también lo es.

c) Utilizando a) y b) dar un argumento que permita justificar usando árboles de refutación que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

(i) $\forall x \Big(P(x) \to \big(P(y) \to P(x)\big)\Big)$.

(ii) $\Big(\forall x P(x) \to \big(P(c) \to P(d)\big)\Big)$.

14) Introducir reglas de expansión de árboles para $\Leftrightarrow$ y demostrar que las siguientes fórmulas son universalmente válidas:

a) $\big(\forall x \forall y \phi(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x \phi(x,y)\big)$

b) $\big(\exists x \exists y \phi(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x \phi(x,y)\big)$

c) $\Big(\forall x \big(Q(x) \wedge \exists y P(y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x Q(x) \wedge \exists y P(y)\big)\Big)$

d) $\Big(\forall x \big(Q(x) \vee \exists y P(y)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x Q(x) \vee \exists y P(y)\big)\Big)$

e) $\Big(\forall x \big(Q(x) \to \exists y P(y)\big) \Leftrightarrow \big(\exists x Q(x) \to \exists y P(y)\big)\Big)$

15) En cada caso, decidir usando árboles de refutación si $\Gamma \models \alpha$.

a) $\Gamma = \{\forall x \exists y \phi(x,y)\}$ y $\alpha = \exists y \forall x \phi(x,y)$.

b) $\Gamma = \{\exists y \forall x \phi(x,y)\}$ y $\alpha = \forall x \exists y \phi(x,y)$.

c) $\Gamma = \emptyset$ y $\alpha = \forall x \forall y \Big(P(x) \to \big(P(y) \to P(x)\big)\Big)$.

16) Analizar si α y β son equivalentes.

a) $\alpha = \neg \forall x \phi(x)$ y $\beta = \exists x \neg \phi(x)$.

b) $\alpha = \forall x \phi(x)$ y $\beta = \neg \exists x \neg \phi(x)$.

c) $\alpha = \forall x \exists y P(x,y)$ y $\beta = \exists y \forall x P(x,y)$.

17) Decidir si las siguientes fórmulas son universalmente válidas.

a) $\forall x \exists y \forall z \exists w \big(P(x,y) \vee \neg P(w,z)\big)$

b) $\Big(\big(\forall x\big(P(x) \to R(x)\big) \wedge \exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)\big) \to \exists x\big(R(x) \wedge \neg Q(x)\big)\Big)$

c) $\Big(\forall x\big(P(x) \vee R(x)\big) \to \forall x P(x)\Big)$

d) $\Big(\exists x\big(P(x) \wedge R(c)\big) \Leftrightarrow \big(\exists x P(x) \wedge R(c)\big)\Big)$

18) a) Sean las fórmulas:

$\alpha_1 = \forall x \forall y \forall z\Big(\big(P(x,y) \wedge P(y,z)\big) \to P(x,z)\Big).$

$\alpha_2 = \forall x \forall y\Big(P(x,y) \to P(y,x)\Big).$

$\alpha_3 = \forall x \exists y P(x,y).$

$\alpha_4 = \forall x P(x,x).$

Estudiar si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \models \alpha_4$ y si $\{\alpha_1, \alpha_2\} \models \alpha_4$.

b) Decidir si

$$\{\exists x \forall y R\big(x, y, f(x,y)\big)\} \models \exists x \forall y \exists z R(x,y,z).$$

c) Decidir si

$$\{\ \exists y \forall x P(x,y)\ ,\ \forall z \forall x\big(P(z,x) \to P(z,c)\big)\ \} \models P(c,c).$$

19) Dado el conjunto

$$\Gamma = \{\forall x \forall y\Big(\big(R(x,y) \wedge R(y,x)\big) \to (x = y)\Big), \forall x \forall y\big(R(x,y) \to R(y,x)\big)\},$$

probar que $\Gamma \models \alpha$, donde

$$\alpha = \forall x \forall y\big(R(x,y) \to (x = y)\big).$$

20) Sea L un lenguaje con igualdad, un símbolo de predicado binario y un símbolo de función unario. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ y α_5 las siguientes fórmulas de L:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \forall x \forall y \big(P(x,y) \to \neg P(y,x)\big),\\
\alpha_2 &= \forall x \forall y \big(x = y \vee P(x,y) \vee P(y,x)\big),\\
\alpha_3 &= \forall x \forall y \Big(P(x,y) \to P\big(f(x), f(y)\big)\Big),\\
\alpha_4 &= \forall x\, f\big(f(x)\big) = f(x),\\
\alpha_5 &= \forall x\, f(x) = x.
\end{aligned}
$$

Probar que

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \alpha_5.$$