Lógica y computabilidad

Práctica 4: ***Compacidad***

1) Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos satisfacibles de fórmulas, tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Probar que existe una fórmula α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.

2) Enunciar y demostrar resultados análogos a los del ejercicio anterior cuando se consideran más de dos conjuntos.

3) Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional que verifica la siguiente propiedad: si α y β son fórmulas de Γ, entonces $\alpha \to \beta$ es tautología o bien $\beta \to \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe una fórmula $\alpha \in \Gamma$ tal que $\{\alpha\} \models \gamma$.

4) Sea Γ un conjunto de fórmulas. Mostrar que si cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ, entonces existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en Γ tales que $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ es tautología.

5) Sea X una fórmula satisfacible. Se construye un conjunto Γ inductivamente del siguiente modo: $\Gamma_0 = \{X\}$, $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{Y\}$, donde Y es una fórmula que es disyunción de literales (variables proposicionales o negación de variables proposicionales), y que contiene una variable proposicional que no aparece en ninguna de las fórmulas de Γ_i o la negación de esta. Si $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \Gamma_i$, probar que Γ es satisfacible.

6) Usar el ejercicio anterior, para dar ejemplos de conjuntos satisfacibles infinitos.

7) Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ y Γ un conjunto de fórmulas tales que α es anticonsecuencia de Γ (ver ej. 18, P. 3). ¿Es α anticonsecuencia de un subconjunto finito de Γ?

8) Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Diremos que Γ_2 *es consecuencia* de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1, entonces existe una fórmula de Γ_2 tal que dicha valuación hace verdadera a la fórmula. Diremos que Γ_2 *es consecuencia fuerte* de Γ_1 si cada vez que una valuación hace verdadera a las fórmulas de Γ_1, entonces dicha valuación hace verdadera a todas las fórmulas de Γ_2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si Γ_2 es consecuencia de Γ_1, entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia de S.

b) Si Γ_2 es consecuencia fuerte de Γ_1, entonces existe un subconjunto finito S de Γ_1 tal que Γ_2 es consecuencia fuerte de S.

9) Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos de fórmulas. Se define

$$(\Gamma_1 \to \Gamma_2) = \{(\alpha \to \beta) \mid \alpha \in \Gamma_1, \beta \in \Gamma_2\}.$$

Probar que si $(\Gamma_1 \to \Gamma_2)$ es satisfacible, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fórmulas de Γ_1 y $\beta_1, \ldots, \beta_m$ fórmulas de Γ_2 tales que $\big((\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \to (\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_m)\big)$ es satisfacible.

10) Establecer resultados análogos a los del ejercicio anterior para los demás conectivos binarios.