Lógica y computabilidad

Práctica 3: ***Consecuencia lógica y árboles de refutación***

1) Decidir si los siguientes conjuntos de fórmulas son satisfacibles, y en tal caso encontrar todas las valuaciones que satisfacen a dichos conjuntos.

a) $\Gamma = \{\big((p_1 \to p_2) \to p_3\big), \neg p_2, (p_1 \vee p_3)\}$;

b) $\Gamma = \{\big((p_2 \to p_1) \to p_1\big), \neg p_1, (p_1 \wedge p_3), (p_3 \to p_1)\}$.

2) Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$.

a) Probar que si Γ es satisfacible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfacible. Mostrar con un ejemplo que la recíproca no es cierta.

b) Probar que Γ es satisfacible si y solo si $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es satisfacible.

3) Sea Γ un conjunto de fórmulas. Probar que existen dos conjuntos insatisfacibles de fórmulas Γ_1 y Γ_2 tales que $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

4) Probar que si k es un número natural, entonces existe un conjunto satisfacible Γ de fórmulas del cálculo proposicional tal que existen exactamente k valuaciones que satisfacen a Γ.

5) a) Probar que existe un conjunto Γ de fórmulas del cálculo proposicional que satisface las siguientes propiedades:

(i) Γ es satisfacible.

(ii) $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es insatisfacible para toda fórmula $\alpha \notin \Gamma$.

b) Más generalmente, dado un conjunto satisfacible de fórmulas Γ, probar que existe $\Gamma' \subseteq \mathbf{Form}$ tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' satisface (i) y (ii) de la parte a).

6) Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ conjuntos de fórmulas.

i) Probar que $\Gamma \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.

ii) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$.

iii) Probar que si $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$, entonces también $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$.

iv) Probar que $\mathbf{Con}(\mathbf{Con}(\Gamma)) = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

7) Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a) Probar que $\mathbf{Con}(\{\beta\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es tautología.

b) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cap \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

ii) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cup \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

iii) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

8) Demostrar que son equivalentes:

a) $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \mathbf{Con}(\emptyset)$.

b) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

c) Existe $\beta \in \mathbf{Form}$ que cumple simultáneamente $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

d) $\mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = \mathbf{Form}$.

9) Probar utilizando árboles que las siguientes fórmulas son contingencias y para cada una de ellas hallar una valuación que las satisfaga y otra que no la satisfaga:

a) $\Big(\big(p_1 \to (p_0 \to p_1)\big) \to \neg(p_2 \vee \neg p_1)\Big)$;

b) $\Big(\big(p_1 \to (p_1 \wedge p_2)\big) \vee \big((p_3 \wedge \neg p_3) \vee (p_5 \to p_6)\big)\Big)$.

10) Utilizando el método de los árboles, decidir si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias, y escribirlas en forma normal disyuntiva utilizando también el método de los árboles:

i) $\Big(\neg(p_1 \vee p_2) \to \big((p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \to p_3)\big)\Big)$;

ii)$\neg\Bigg((p_1 \to p_3) \to \Big((p_2 \to p_3) \to \big((p_1 \vee p_2) \to p_3\big)\Big)\Bigg)$;

iii) $\Bigg((p_1 \vee p_2) \to \Big(p_3 \to \big((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3)\big)\Big)\Bigg)$;

iv) $\Big(\big(\neg\neg\neg(p_1 \wedge p_2) \vee p_3\big) \to p_4\Big)$;

v) $\Big(\big((p_1 \to p_2) \to p_1\big) \to p_1\Big)$.

11) Usando árboles, decicir si $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ en los siguientes casos:

i) $\alpha = \big(p_1 \wedge (p_1 \to p_0)\big)$, $\Gamma = \{p_1, p_0, \neg p_0\}$;

ii) $\alpha = (p_1 \to p_0), \Gamma = \{p_1, p_1 \to \neg p_0\}$;

iii) $\alpha = \big((p_1 \wedge p_2) \to p_0\big), \Gamma = \{p_1, (p_2 \vee p_0), (p_1 \wedge p_0)\}$.

12) Sea $\alpha \in \mathbf{Form}$ tal que α es consecuencia lógica del conjunto formado por todas las subfórmulas de α diferentes de α.

a) Dar ejemplos de fórmulas que tienen esta propiedad y probarla usando árboles.

b) ¿Puede darse una caracterización de qué fórmulas cumplen esta propiedad?

13) Sea Γ un conjunto finito y satisfacible de fórmulas. Probar que el conjunto de valuaciones que satisface a Γ es infinito.

14) Sea Γ un conjunto satisfacible de fórmulas del cálculo proposicional que satisface la siguiente propiedad:

Para toda fórmula α: $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ o $\neg\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$.

Probar que si $\alpha \vee \beta \in \mathbf{Con}(\Gamma)$, entonces $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ o $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma)$ para todo par de fórmulas α, β.

15) Dar ejemplos de conjuntos de fórmulas del cálculo proposicional que verifiquen la hipótesis del ejercicio anterior.

16) Sea Γ un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional con la propiedad $\mathbf{Con}(\Gamma) = \Gamma$.

Probar que Γ es infinito. Dar ejemplos de estos conjuntos.

17) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si α es una fórmula tal que todo árbol de refutación de α es abierto, entonces α es una tautología.

b) Si α es una contradicción, entonces todo árbol de refutación de α es cerrado.

c) Si α admite un árbol de refutación completo y cerrado, entonces todo árbol de refutación completo de α es cerrado.

18) Sean Γ un conjunto de fórmulas y sea α una fórmula. Diremos que α es *anticonsecuencia* de Γ si se cumple lo siguiente:

Si v es una valuación tal que $v(\alpha) = 0$, entonces $v(\beta) = 0$ para toda $\beta \in \Gamma$.

a) Si $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma)$, ¿es α anticonsecuencia de Γ?

b) Si α es anticonsecuencia de Γ, ¿es α consecuencia de Γ?

19) Dar ejemplos de fórmulas que sean anticonsecuencia de algún conjunto Γ y enunciar propiedades análogas a las del ejercicio 6) para la noción de anticonsecuencia.