Lógica y computabilidad

Práctica 1: ***Lenguajes formales y sintaxis del cálculo proposicional***

Lenguajes formales

1) Sea $\mathcal{L}_1$ el lenguaje obtenido a partir del alfabeto $A_1 = \{*, \sim\}$ mediante las siguientes reglas:

(i) $*$ es una palabra;

(ii) si α es una palabra, entonces $\sim\alpha$ y $*\alpha$ también lo son;

(iii) α es una palabra si y solo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las reglas anteriores.

a) Escribir cinco expresiones de $\mathcal{L}_1$ que no sean palabras y cinco que sí lo sean.

b) Presentar, si es posible, un método para decidir en un número finito de pasos, si una expresión dada de A_1^* pertenece o no a $\mathcal{L}_1$ (es decir, si es o no una palabra).

2) Sea $A = \{a, b, c\}$, $S = \{\circ, \clubsuit\}$ con $A \cap S = \emptyset$. Sea $\Sigma = A \cup S$.
Definimos un lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ por las siguientes reglas:

(i) la expresión vacía (notada ϕ) pertenece a $\mathcal{L}$;

(ii) si $x \in A$ entonces x es una palabra;

(iii) si α es una palabra, la expresión $\circ\alpha\clubsuit$ también lo es;

(iv) si α es una palabra y $x \in A$, las expresiones $x\alpha$ y αx son palabras;

(v) una expresión es una palabra si y sólo si se obtiene de alguna de las reglas (i) a (iv).

Se define el peso de una expresión como el número de $\circ$ que aparecen en la expresión menos el número de $\clubsuit$ que aparecen en la expresión.

a) Probar que las palabras de $\mathcal{L}$ son expresiones de peso 0.

b) ¿Es toda expresión de peso 0 una palabra?

c) Decidir si hay unicidad de escritura en las palabras en términos de las reglas (i) a (iv). [1]

[1] Es decir, dada una palabra α cualquiera, ¿es cierto que de las afirmaciones

3) Sea A un conjunto finito y sea $S \subsetneq A$ un subconjunto propio no vacío. Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje definido mediante las reglas:

(i) si $x \in A \setminus S$, entonces x es una palabra;

(ii) si $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son palabras, entonces $s\alpha_1 \ldots \alpha_n s$ es una palabra;

(iii) una expresión es una palabra si y solo si resulta de aplicar la regla (i) o la regla (ii).

a) Probar que si α es una palabra, entonces el número de elementos de S que figura en α es un número par.

b) Probar que si $s, t \in S$ y además $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ $(m, n \in \mathbb{N})$ son palabras tales que

$$s\alpha_1 \ldots \alpha_n s = t\beta_1 \ldots \beta_m t,^{2}$$

entonces

$$n = m, \quad s = t \quad \text{y} \quad \alpha_k = \beta_k, \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

c) Sean α y β palabras y sea β' la expresión que se obtiene sustituyendo todas las apariciones de elementos de $A \setminus S$ en β por α.[3] Probar que β' es una palabra.

4) Sea $X = \{x\ ,\ |\ ,\ f(\ ,\ ;\ ,\ )\}$ (*hay cinco elementos, separados por comas*).

Además, abreviamos como x_i la expresión $x|| \cdots |$ en la que aparece un total de i barras, $i \in \mathbb{N}_0$). Estas expresiones serán llamadas variables y el conjunto de todas ellas será denotado por V. Es decir,

$$V = \{x, x|, x||, x|||, x||||, \ldots\}.$$

Definimos ahora el siguiente lenguaje $\mathcal{L} \subseteq X^*$:

- $\alpha = \phi$;
- $\alpha \in A$;
- $\exists \beta \in \mathcal{L}$ tal que $\alpha = \circ\beta\clubsuit$;
- $\exists x \in A$ y $\exists \beta \in \mathcal{L}$ tal que $\alpha = x\beta$, y si además $\alpha = y\gamma$ con $y \in A$ y $\gamma \in \mathcal{L}$, entonces $x = y$ y $\beta = \gamma$;
- $\exists x \in A$ y $\exists \beta \in \mathcal{L}$ tal que $\alpha = \beta x$, y si además $\alpha = \gamma y$ con $y \in A$ y $\gamma \in \mathcal{L}$, entonces $\beta = \gamma$ y $x = y$

una y solo una es verdadera?

[2] Claramente ambas expresiones son palabras. ¿Por qué?

[3] Por ejemplo, si $\beta = sas$ con $s \in S$ y $a \in A \setminus S$, entonces $\beta' = s\alpha s$.

(i) si $y \in V$, entonces y es una palabra;

(ii) si t y t' son palabras, entonces $f(t;t')$ es una palabra;

(iii) una expresión es una palabra si y solo si se obtiene de alguna de las reglas (i) o (ii).

a) Si t_1, t_2, t_3, t_4 son palabras tales que $f(t_1;t_2) = f(t_3;t_4)$, probar que $t_1 = t_3$ y $t_2 = t_4$.

b) Si dos palabras poseen las mismas variables, ¿son necesariamente iguales?

c) Llamemos *valuación* a cualquier función $v\colon \mathcal{L} \to \mathbb{N}_0$ tal que $v\big(f(t;t')\big) = v(t) + v(t')$ para todo par de palabras t, t'.

Probar que dada una función $u\colon V \to \mathbb{N}_0$, existe una valuación v que extiende a u, es decir, tal que $v_{|V} = u$.[4]

d) Digamos que dos palabras t y t' son *equivalentes* si $v(t) = v(t')$ para toda valuación v.

Si dos palabras poseen las mismas variables, ¿son necesariamente equivalentes?

e) Si dos palabras son equivalentes, ¿tienen necesariamente las mismas variables?

5) Sea A un conjunto finito y no vacío y sea $\mathcal{L} \subseteq A^*$ un lenguaje. Si $n > 1$ es un número natural, una palabra α de $\mathcal{L}$ se dice *n-reducible* si existen palabras $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tales que $\alpha = \beta_1 \ldots \beta_n$. Si esto no sucede, se dice que α es *n-irreducible*. Una palabra α se dice *irreducible* si es n-irreducible para todo $n > 1$.

a) Probar que si $n > 1$ y α es una palabra entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y palabras $\beta_1, \ldots, \beta_k$ tales que $\alpha = \beta_1 \ldots \beta_k$ y β_j es n-irreducible para todo j entre 1 y k. ¿Es única esta representación?

b) En cada uno de lo ejercicios anteriores encontrar las palabras n-irreducibles para cada $n > 1$.

6) Sea $\mathcal{P}$ el lenguaje obtenido a partir del alfabeto $A = \{p, |, C, B, L, N\}$, donde las palabras son llamadas fórmulas, y se tiene la siguiente gramática

[4] Es decir, tal que al restringir v a V resulta la función u; o más explícitamente, v cumple

$$v(y) = u(y), \quad \forall y \in V.$$

(aquí $p_i = p|| \cdots |$ con el signo $|$ repetido i veces; a estas expresiones las denominamos *variables proposicionales*):

(i) p_i es una fórmula para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

(ii) si α es una fórmula, entonces $N\alpha$ es una fórmula;

(iii) si α, β son fórmulas, entonces $*\alpha\beta$ también lo es para todo $* \in \{C, B, L\}$;

(iv) α es una fórmula si y sólo si se la puede obtener aplicando un número finito de veces las reglas anteriores.

(Este lenguaje es conocido como el lenguaje correspondiente a la *notación polaca*).

a) Decidir si las siguientes expresiones de $\mathcal{P}$ son fórmulas:
(a.1) $Cp_0Cp_1p_0$.
(a.2) $CCp_0p_1CCp_1p_2Cp_0p_2$.
(a.3) $CCCp_1p_2p_2BBp_2p_1p_1$.
(a.4) $LCNp_5Np_2Bp_2p_5$.
(a.5) $Np_1LNp_3Bp_1p_2$.
(a.6) $Np_1p_2Lp_0p_2$.
(a.7) p_2Lp_1.
(a.8) Np_1Cp_2.

b) Se define el peso de la expresión $x \in A^*$ como el número de ocurrencias de C en x más el número de ocurrencias de B en x más el número de ocurrencias de L en x menos el número de ocurrencias de variables proposicionales en x (notación: $p(x)$). Calcular el peso de cada una de las expresiones de a).

c) Demostrar que si x es una fórmula, entonces $p(x) = -1$. Decidir si vale la recíproca.

d) Demostrar que si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son fórmulas y $*, \circ \in \{C, B, L\}$ son tales que $*\alpha\beta = \circ\gamma\delta$, entonces $* = \circ, \alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$.

e) Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje del cálculo proposicional definido sobre el alfabeto $\tilde{A} = \{p, |, \neg, \rightarrow, \vee, \wedge, (,)\}$.

Definamos entonces una función de traducción $T \colon \mathcal{P} \to \tilde{A}^*$ de la siguiente forma: si $x, y \in \mathcal{P}$ entonces

(i) $T(p_i) = p_i$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

(ii) $T(Nx) = \neg T(x)$;

(iii) $T(Cxy) = \big(T(x) \to T(y)\big)$;

(iv) $T(Bxy) = \big(T(x) \vee T(y)\big)$;

(v) $T(Lxy) = \big(T(x) \wedge T(y)\big)$.

Traducir todas las expresiones de a).

f) Probar que para todo $x \in \mathcal{P}$, se tiene $T(x) \in \mathcal{L}$; es decir, $T(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.

g) Definir una función de traducción $S\colon \mathcal{L} \to A^*$ tal que $S(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{P}$.

Lenguaje del cálculo proposicional

En este apartado, $c(\alpha)$ denota la complejidad de una fórmula α, $l^*(\alpha)$ su longitud modificada y $\bar{l}(\alpha)$ su *longitud standard*, definida inductivamente como sigue:

- $\bar{l}(p_i) = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$;
- $\bar{l}(\neg\alpha) = 1 + \bar{l}(\alpha)$; y
- $\bar{l}\big((\alpha \circ \beta)\big) = \bar{l}(\alpha) + \bar{l}(\beta) + 3$ si $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

7) Para cada una de las siguientes fórmulas del cálculo proposicional hallar dos cadenas de formación cuyos eslabones solo involucren variables proposicionales que aparezcan en la fórmula respectiva.

a) $\big((p_1 \vee p_2) \to p_2\big)$

b) $\big((p_1 \to p_2) \to (p_2 \to p_1)\big)$

c) $\big(p_1 \to (p_2 \vee \neg p_3)\big)$

8) Sea α una fórmula del cálculo proposicional y sea $X_1X_2\ldots X_n$ una cadena de formación de α. Probar que si β es una subfórmula de α, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ $(i \leq n)$ tal que $X_i = \beta$.

9) Sea α una fórmula del cálculo proposicional. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

- para todo par de subfórmulas β y γ de α, β es subfórmula de γ o γ es subfórmula de β;
- existe una cadena de formación $X_1X_2\ldots X_n$ de α tal que X_i es subfórmula de X_{i+1} para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $i \leq n-1$.

10) Sea α una fórmula del cálculo proposicional que satisface las condiciones equivalentes del ejercicio anterior (en particular, la primera de ellas).

a) Probar que en α figura solamente una variable proposicional.

b) ¿Es cierta la recíproca? Es decir, si α tiene una sola variable proposicional, ¿necesariamente se cumple la condición mencionada?

11) Sea α una fórmula del cálculo proposicional tal que $c(\alpha) = n > 0$.

a) Probar que existe una subfórmula de α de complejidad 1.

b) Supongamos que $n > 2$. ¿Existe necesariamente una subfórmula de α que tenga complejidad k si $1 < k < n$?

12) Una fórmula del cálculo proposicional se dice *binaria* si $\neg$ no figura en ella.

a) Hallar todos los números naturales n tales que existe una fórmula binaria α de longitud standard n.

b) Encontrar una fórmula que relacione la complejidad de una fórmula binaria con su longitud standard.

13) Sea $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ una sucesión infinita de fórmulas del cálculo proposicional. Si β es una expresión del cálculo proposicional (un elemento de A^*, donde A es el alfabeto del cálculo proposicional), definimos $s(\beta)$ a la expresión que se obtiene de reemplazar en β la $i-$ésima variable proposicional p_i por la fórmula α_i, para cada $i \in \mathbb{N}_0$ tal que p_i figura en β.

a) Definir formalmente $s(\beta)$ para toda expresión β.

b) Probar que si β es una fórmula, entonces $s(\beta)$ es una fórmula.

14) Dos fórmulas α y β del cálculo proposicional se dicen *sintácticamente equivalentes*, y se nota $\alpha \sim \beta$, si existe una sucesión $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de fórmulas del cálculo proposicional tal que α_i es una variable proposicional para todo i y $s(\beta) = \alpha$, donde $s(\beta)$ se define como en el ejercicio anterior.

a) Probar que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia sobre el conjunto de fórmulas del cálculo proposicional.

b) Probar que si $\alpha \sim \beta$, entonces α y β tienen la misma longitud standard, la misma longitud modificada y la misma complejidad.

15) Sea α una fórmula del cálculo proposicional. Sea $\alpha_{\not\neg}$ la expresión que se obtiene de eliminar el símbolo de negación en α.[5]

a) Definir formalmente $\alpha_{\not\neg}$ para toda fórmula α.

b) Probar que si α es una fórmula, entonces $\alpha_{\not\neg}$ es también una fórmula.

16) Sea α una fórmula del cálculo proposicional.

a) Probar que $c(\alpha) < \bar{l}(\alpha)$.

b) Probar que $c(\alpha) + 1 = \bar{l}(\alpha)$ si y sólo si α es una variable proposicional o bien $\neg$ es el único conectivo que figura en α.

[5] Por ejemplo, si $\alpha = (p_1 \to \neg p_2)$, entonces $\alpha_{\not\neg} = (p_1 \to p_2)$.

17) Establecer resultados análogos a los de los ejercicios 12) y 16) para la longitud modificada l^*.

18) Sea α una fórmula del cálculo proposicional y sean β_1, β_2 subfórmulas distintas y no triviales de α ($\beta_i \neq \alpha$).

a) Probar que si α es binaria (ver ejercicio 12)), entonces $c(\beta_1) + c(\beta_2) \leq c(\alpha)$.

b) Probar que si α no es binaria, la afirmación anterior no necesariamente vale.

c) Probar que tampoco vale necesariamente la afirmación de a) si se suman tres o más subfórmulas diferentes de α (aun suponiendo α binaria).

19) Una fórmula α del cálculo proposicional se dice *prima* si para todo par de subfórmulas α_1, α_2 de α vale que

$$c(\alpha) = c(\alpha_1) \cdot c(\alpha_2) \quad \Longrightarrow \quad c(\alpha) = c(\alpha_1) \,\vee\, c(\alpha) = c(\alpha_2).$$

a) Probar que si $c(\alpha)$es un número primo, entonces α es prima.

b) Mostrar con un ejemplo que la recíproca de a) es falsa.

c) Probar que si α es una fórmula, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y existen subfórmulas primas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tales que $c(\alpha) = c(\beta_1) \cdot \ldots \cdot c(\beta_n)$.