4.Geometría Proyectiva en el plano

Actividad 1:

Recordemos las dos maneras de mirar el plano proyectivo:

- El plano R^2 agregándole los puntos impropios (uno por cada dirección del plano)
- Las rectas de R^3 por el origen como puntos de P_2.

a. Analicen y demuestren los siguientes resultados usando ambos modelos

i. Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta.
ii. No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a una misma recta.
iii. Toda recta tiene infinitos puntos.
iv. Dos rectas distintas del plano proyectivo siempre tienen un punto común.
v. No todas las rectas del plano proyectivo pasan por un mismo punto.
vi. Por todo punto del plano proyectivo pasan infinitas rectas.

b. Analicen cuáles de los enunciados valen en el plano de la geometría euclídea y cuáles no.

Actividad 2:

Consideren los puntos del plano proyectivo:
u = λ (1, 1, 1); **v** =μ (1, -1, 0); **w** = ω (0, 1, 2);
y los siguientes sistemas de referencia:
E1= {(1, 1, 1); (1, -1, 0); (0, 1, 2); (2, 1, 3)};
E2= {(3, 3, 3); (-5, 5, 0); (0, 1, 2); (-2, 9, 5)};
E3= {(1, 1, 1); (1,-1,0); (0, 1, 2); (1, 4, 4)},
donde el cuarto vector es el punto unidad (observar que los vectores de las bases corresponden a tomar distintos valores de λ, μ, ω respectivamente).

a. Dar las coordenadas homogéneas del (0, 3, 0) en cada una de las bases.
b. Escribir las coordenadas no homogéneas en base canónica de los puntos:
(1, 1, 1); (1, -1, 0); (0, 1, 2); (2, 0, 1) que se obtienen al cortar con el plano z = 1; y también las que se obtienen al cortar con el plano y = 4.
c. Encuentren para cada caso de **b** un punto impropio del plano.

Actividad 3:

Sean v=(1, 1, 0) y w=(3, 1,1) dos puntos de P_2, la recta que determinan es el conjunto de puntos x de la forma $\mathbf{x = \lambda\, v + \mu\, w}$ **,** con coeficientes no simultáneamente nulos.

a. Encuentren las coordenadas homogéneas en base canónica de los puntos de la recta. ¿El (0,0,0) pertenece a la recta?¿Y el (6,4,1)?
b. Si w es el impropio de la recta, ¿cuál es la abcisa no homogénea del (6,4,1)? ¿Cuáles son la coordenadas homogéneas en base canónica del punto de abcisa no homogénea γ=2?
c. Si v es el impropio de la recta, ¿cuál es la abcisa no homogénea del (6,4,1)? ¿Cuáles son la coordenadas homogéneas en base canónica del punto de abcisa no homogénea γ=2?

Actividad 4:

a. Enuncien y demuestren el teorema recíproco del teorema de Desargues (Sugerencia: Consideren O = AA’ ∩ BB’; D = OC ∩ A’C’. Piensen en los triángulos A’B’D y ABC).

b. Si A, B, C son puntos de una recta r y A', B',C' otros de una recta r', tales que AA', BB' y CC' son rectas concurrentes, prueben que los puntos $P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$ y $R = AC' \cap A'C$ están alineados con el punto $O = r \cap r$.

c. Trazar por un punto dado del plano una recta que pase por el punto de intersección de otras dos que se cortan fuera de los límites del dibujo.

d. Sea p una recta dada y A, B dos puntos dados que no están sobre p. Suponiendo que no es posible unir A con B obtener $p \cap AB$.

e. ¿Es posible ubicar 10 monedas en 10 filas de 3 monedas cada una de modo que cada moneda esté en exactamente 3 filas?

Actividad 5:

a. Si A = (2, 1, 3); B = (1, 1, 3); C = (0, 1, 3); D = (1, 1, 3); calcular (ABCD); (BADC) y (DBAC) ¿Hay algún inconveniente si intentan calcular (BACD)? ¿Qué se puede decir entonces de B?

b. Si A = (2, 1, 3); B = (1, 1, 3); C = (0, 1, 3); hallar si es posible, D tal que (ABCD) = 3. ¿Existe algún D tal que (ABCD)= 4 y (DCAB)= 1/3?

c. ¿Es verdad que el punto de intersección de las dos rectas entre las que hay definida una perspectividad es un punto fijo para la perspectividad? ¿Por qué?

d. Analicen si existen condiciones bajo las cuales las perspectividades son proyectividades y si existen condiciones bajo las cuales las proyectividades son perspectividades.

e. El enunciado: “toda proyectividad entre dos rectas que deja fijo el punto de intersección es una perspectividad”, ¿es verdadero?

f. Analicen el siguiente resultado: Toda proyectividad es producto de perspectividades

g. Busquen gráficamente el cuarto armónico entre A, B y el impropio de la recta.

Actividad 6:

a. Demostrar que si una proyectividad ϕ del haz de rectas por el punto O en si mismo, verifica que:$\phi(a)= b$ y $\phi(b)= a$ para un par de rectas a, b del haz, entonces si $\phi(c)= d$, $\phi(d)= c$.

b. Un triángulo ABC se corta con una recta r , llamemos Pa, Pb y Pc a los puntos de intersección con cada uno de los lados. Sean Pa' el conjugado armónico de Pa respecto de C, B y análogamente Pb' y Pc'. Probar que APa', BPb' y CPc' concurren en un punto. Enunciar el teorema dual.

c. Hallar las ecuaciones de la colineación que manda los puntos
A = (1, 0, 0); B = (0, 1, 0); C = (1, 1, 1); D=(2, 0, 1)
en los puntos A’ = (0, 0, 1) B’ = (0, 1, 1) C’ = (1, 0, 1) D’= (−1, 2, 3)

Actividad 7:

a. Realicen la **construcción** de otros puntos de la homología dada por el centro, el eje y un par de homólogos.

b. Analicen qué se obtiene si restringimos el dominio de una homología a una recta.

c. Hallen las condiciones que debe verificar una homología para asegurar que transforma un cuadrilátero convexo ABCD, en un paralelogramo.

d. Prueben que la colineación que manda A, B, C, D en B, A, D, C es una homología. Hallen el eje y el centro.

e. Analicen cómo son, en el sentido de la geometría elemental, un triángulo y su imagen por una semejanza. ¿Se puede mandar uno en otro con una homotecia? ¿Cuál es su centro?

Actividad 8:

- **a.** Enuncien los teoremas límite del teorema de Brianchon, y verifiquen que son los teoremas duales de los teoremas límite del teorema de Pascal.
- **b.** Dados cinco puntos de una cónica, hallen otros puntos
- **c.** Dada una cónica por 4 tangentes y el punto de contacto de una de ellas, hallen otra tangente.y el punto de contacto de otra de las tangentes dadas.
- **d.** Si cinco de los seis vértices de un hexágono están situados en una circunferencia y los tres pares de lados opuestos se cortan en tres puntos alineados, entonces el sexto vértice está situado en la misma circunferencia.
- **e.** Dados tres puntos (A, B, C) y dos rectas (*y, z*), consideramos pares de puntos (Y,Z) tales que $Y \in y$, $Z \in z$, y la recta YZ pasa por A. Para cada par (Y, Z) se define X tal que la recta XY pasa por B, y la recta XZ pasa por C. Prueben que el punto X describe una cónica (Sugerencia, encuentren la proyectividad que la define).

Actividad 9:

- **a.** Probar que las polares de los puntos de una recta pasan por el polo de la misma. Enunciar el resultado dual.
- **b.** Dados A y B dos puntos de una cónica, deducir que el polo de la recta que pasa por esos puntos es el punto de intersección de las rectas tangentes t_A y t_B.
- **c.** Construir la polar de un punto respecto de una cónica dada por 5 puntos.
- **d.** Dada una cónica K y un punto cualquiera P del plano, probar que la polar de P respecto de K contiene a las intersecciones de las tangentes a K en los puntos en que cualquier secante por P corta a K.

Ejercicios para repasar:

1. a. Hallar el centro y el eje de la homología que transforma el triángulo ABC en A'B'C' donde A= (2, 0), B= (6, 0), C= (4, -2), A'= (2, 4), B'= (6, 4), C'= (4, 6). ¿Es única?

   b. Hallar el cuarto armónico de A, B, A_∞ con A_∞ el impropio de la recta AB.

   c. Hallar la razón de la homología.

   d. Hallar $A'C \cap AC'$ si no es posible unir ambas rectas.

2. Sea v = (3, 1, 0) w= (2, 1, 1) dos puntos de P2.
   a. Decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta determinada por v y w: (0, 0, 0), (5, 2, 1), (8, 3, 1), (8, 3, 2).
   b. ¿Cuál es la abscisa no homogénea del (7, 3, 2) si el impropio es w? ¿Y si el impropio es v?
   c. ¿Cuáles son las coordenadas homogéneas en P2 del punto de abscisa no homogénea $\gamma = 3$ si el impropio es v?

3. Sea ABC un triángulo y sean D, E y F los puntos donde la circunferencia inscripta es tangente al lado BC, CA y AB respectivamente. Llamemos D' al punto donde la recta EF corta a BC. Demostrar que B, C, D', D es una cuaterna armónica.

4. Sean A, B, C, D, E cinco puntos de una cónica. Hallar el polo de la recta determinada por A y B.