Test de Hipotsis - Normales y asintóticos

February 23, 2017

Una muestra normal, varianza conocida

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma_0^2\right)$ i.i.d., con σ_0^2 conocida.
Se quiere testear

$H_0 : \mu = \mu_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

Estadístico del test

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} N(0,1)$$

Una muestra normal, varianza desconocida

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ i.i.d. Se quiere testear

$H_0 : \mu = \mu_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

Estadístico del test

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} \quad t_{n-1}$$

donde

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{1}$$

Test para la varianza de una población normal con media conocida

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ i.i.d. Se quiere testear

$H_0 : \sigma = \sigma_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \sigma \neq \sigma_0 \qquad H_1 : \sigma > \sigma_0 \qquad H_1 : \sigma < \sigma_0$$

y la media poblacional $\mu = \mu_0$ es desconocida. Estadístico del test ????

Test para la varianza de una población normal

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ i.i.d. Se quiere testear

$H_0 : \sigma = \sigma_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \sigma \neq \sigma_0 \qquad H_1 : \sigma > \sigma_0 \qquad H_1 : \sigma < \sigma_0$$

y la media poblacional μ es desconocida. Estadístico del test

$$(n-1)\,\frac{S^2}{\sigma_0^2} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} \quad \chi^2_{n-1}$$

donde

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \tag{2}$$

Test asintótico (o aproximado) para la media de una población

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim F$ i.i.d. Sea $\mu = E(X_1)$. Se quiere testear

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ versus alguna de las alternativas siguientes}$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \qquad H_1 : \mu > \mu_0 \qquad H_1 : \mu < \mu_0$$

Estadístico del test asintótico (para n grande)

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^2}{n}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} N(0,1)$$

donde

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{3}$$

Test asintótico para una proporción poblacional

Sean $X_1, \ldots, X_n \sim Bi\,(1, p)$ Se quiere testear

$H_0 : p = p_0$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : p \neq p_0 \qquad H_1 : p > p_0 \qquad H_1 : p < p_0$$

Estadístico del test asintótico (para n grande)

$$\frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} \quad N\,(0, 1)$$

donde $\widehat{p} = \overline{X}$ es la proporción de éxitos en la muestra.

Test para comparar medias de dos poblaciones normales independientes

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dos muestras aleatorias independientes entre sí. Se quiere testear

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

Caso 1: varianzas conocidas

Estadístico del test

Test para comparar medias de dos poblaciones normales independientes

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dos muestras aleatorias independientes entre sí. Se quiere testear

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

Caso 1: varianzas conocidas

Estadístico del test

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} \quad N(0,1)$$

Test para comparar medias de dos poblaciones normales independientes

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dos muestras aleatorias independientes entre sí. Se quiere testear

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

Caso 2: varianzas desconocidas pero iguales

Estadístico del test

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \underset{\text{bajo } H_0}{\underset{\uparrow}{\sim}} t_{n_1+n_2-2}$$

donde

$$S_p^2 = \frac{S_1^2\left(n_1 - 1\right) + S_2^2\left(n_2 - 1\right)}{n_1 + n_2 - 2}$$

Test para comparar medias de dos poblaciones normales independientes

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dos muestras aleatorias independientes entre sí. Se quiere testear

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

Caso 3: varianzas desconocidas y no necesariamente iguales
En este caso tenemos el test de Welch que tiene nivel aproximado.
Estadístico del test

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} \quad t_K$$

donde

Caso 3: varianzas desconocidas y no necesariamente iguales
donde

$$K = \left[\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}} \right]$$

Test para comparar varianzas de dos poblaciones normales independientes

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$ dos muestras aleatorias independientes entre sí. Se quiere testear

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\
H_1 &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2
\end{aligned}
$$

Estadístico del test

$$
\frac{S_1^2}{S_2^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\sim} F_{n_1-1, n_2-1}
$$

Test asintótico (o aproximado) para comparar las medias de dos poblaciones

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1}$ v.a.i.i.d. y sean $\mu_1 = E(X_1)$ y $\sigma_1^2 = Var(X_1)$, e $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ v.a.i.i.d. independientes de las anteriores y sean $\mu_2 = E(Y_1)$ y $\sigma_2^2 = Var(Y_1)$, donde n_1 y n_2 son números suficientemente grandes. Se quiere testear

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$$

Estadístico del test

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} N(0,1)$$

Test asintótico (o aproximado) para comparar dos proporciones poblacionales

Sean $X_1, \ldots, X_{n_1} \sim Bi\,(1, p_1)$ v.a.i.i.d. e $Y_1, \ldots, Y_{n_2} \sim Bi\,(1, p_2)$ v.a.i.i.d. independiente de las anteriores Se quiere testear

$H_0 : p_1 - p_2 = \delta$ versus alguna de las alternativas siguientes

$$H_1 : p_1 - p_2 \neq \delta \qquad H_1 : p_1 - p_2 > \delta \qquad H_1 : p_1 - p_2 < \delta$$

Estadístico del testcon asintótico, con n_1 y n_2 grandes

$$\frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{n_2}}} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bajo } H_0}}{\overset{\text{aprox}}{\sim}} \quad N\,(0,1)$$

donde $\widehat{p}_1 = \overline{X}$ y $\widehat{p}_2 = \overline{Y}$ son, respectivamente, las proporciones de éxitos en la primer y segunda muestra.

Test para comparar medias de dos muestras apareadas

Sean $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de los resultados de dos mediciones realizadas sobre la misma unidad experimental Supongamos que las diferencias $D_i = X_i - Y_i \sim N\left(\mu_D, \sigma_D^2\right)$ independientes entre sí. Se quiere testear

$$H_0 : \mu_D = \delta \text{ versus alguna de las alternativas siguientes}$$

$$H_1 : \mu_D \neq \delta \qquad H_1 : \mu_D > \delta \qquad H_1 : \mu_D < \delta$$

Estadístico del test

$$\frac{\overline{D} - \delta}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{S_D^2}{n}}} \quad \underset{\text{bajo } H_0}{\underset{\uparrow}{\sim}} \quad t_{n-1}$$

donde S_D es el desvío estándar de las D_i, es decir

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2.$$