Estadística (Química)

Práctica 2 – Variables aleatorias

1. Sea X una variable aleatoria discreta con $P(X = 0) = 0.25$, $P(X = 1) = 0.125$, $P(X = 2) = 0.125$ y $P(X = 3) = 0.5$. Grafique la función de probabilidad puntual y la función de distribución acumulada de X. Calcule $E(X)$ y $Var(X)$.

2. La siguiente tabla muestra la función de distribución acumulada de una variable aleatoria discreta X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0.7 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0.8 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

   (a) Indique los valores que puede tomar la variable X, es decir calcule su rango. Obtenga su función de probabilidad puntual.
   (b) Calcule $P(X > 3)$.
   (c) Calcule $P(2 < X \leq 4)$.
   (d) Calcule $P(2 \leq X \leq 4)$ y la probabilidad de su complemento.

3. Una ruleta tiene 37 números, del 0 al 36. Cada número de la ruleta tiene asignado un color: hay 18 números de color negro, 18 rojos y uno verde, que es el cero. En cada juego de la ruleta se arroja una bolita en un disco que gira, de modo que cuando la ruleta deja de girar, la bolita cae en el casillero que le corresponde a cada número (del 0 al 36) con igual probabilidad. Una apuesta posible al jugar a este juego es apostar a lo que se llama "color": se apuesta, por ejemplo \$1 al color rojo (o bien al negro, pero al verde no se puede apostar). Si el número que sale es rojo, el apostador gana, y en otro caso pierde.

   (a) En un casino clásico, en caso de salir rojo el número apostado, el apostador recibe un premio de \$2, (por lo tanto su ganancia neta en el caso de ganar es \$1), y no recibe nada en el caso de perder (por lo tanto, en este caso, su ganancia neta es -\$1). Hallar la esperanza y la varianza de la ganancia neta del apostador al jugar "color rojo" en un casino clásico.
   (b) Un juego de apuestas se dice equilibrado si la esperanza de la ganancia neta es igual a 0, es decir, en promedio quien apuesta no gana ni pierde. ¿Es equilibrado el juego que proponen los casinos clásicos cuando apostamos a un color dado?
   (c) Un casino generoso decide ofrecer un poco más de \$1 como premio si un jugador apuesta \$1 a color (rojo, por ejemplo). ¿Cuánto debería pagar el casino para que el juego resulte equilibrado?

4. Un examen de multiple choice está compuesto de 15 preguntas, cada pregunta con 5 respuestas posibles de las cuales sólo una es correcta. Suponga que uno de los estudiantes que realizan el examen contesta las preguntas al azar.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no conteste ninguna correctamente?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste al menos 3 preguntas correctamente?
   (c) ¿Cuál es el número de respuestas correctas esperado?

5. La probabilidad de que el vapor se condense en un tubo de aluminio de cubierta delgada a 10 atm de presión es de 0.4. Se prueban 12 tubos de este tipo bajo las mismas condiciones en forma independiente.

   (a) ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad de tubos de este tipo en los que el vapor se condensa?

(b) Determinar la probabilidad de que:

   i. el vapor se condense en (exactamente) 4 de los tubos.

   ii. el vapor no se condense en más de 10 tubos.

(c) Si la cantidad de tubos en los cuales el vapor se condensa dista de su valor esperado en menos de 3, se considera que la prueba es aceptable. Un laboratorio realiza diariamente una prueba sobre 15 tubos durante 40 días de manera independiente. Considere la variable aleatoria Y que cuenta el número de días en los cuales la prueba resulta aceptable, ¿qué distribución tiene Y? ¿Cuál es el número esperado de días en los cuáles la prueba resulta aceptable?

6. El número de partículas emitidas por una fuente radioactiva, en un día, es una variable aleatoria X con distribución de Poisson. Si la probabilidad de no emitir ninguna partícula en ese período de tiempo es $e^{-1/3}$, calcule el valor esperado de X. Calcule la probabilidad de que en un día la fuente emita por lo menos 2 partículas.

7. Sea X la cantidad de autos que pasan por un peaje cada 5 minutos. Suponga que X sigue una distribución de Poisson con $E(X^2) = 6$.

   (a) Hallar la probabilidad de que en 5 minutos pasen 4 autos o más.

   (b) Observamos el número de autos que pasan por el peaje durante 7 períodos consecutivos de 5 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que en por lo menos uno de esos períodos pasen 4 autos o más?

   (c) El sistema puede cobrar hasta 3 autos por 5 minutos. Es decir si pasan 4 o más, a partir del cuarto auto que pasa se levanta la barrera y no se cobra peaje del cuarto auto en adelante. Sea Y la cantidad de autos que pagarán peaje en los próximos 5 minutos. Calcule el rango de Y. ¿La distribución de Y es Poisson? Calcular la función de probabilidad puntual de Y, su esperanza y su varianza.

   (d) Si cada peaje vale 6 pesos, halle el valor esperado y la varianza de lo recaudado en 5 minutos.

8. Un espectáculo dispone de capacidad para 2000 espectadores. De experiencias previas, la organización sabe que cada espectador que ha comprado su entrada tiene probabilidad 0,01 de no concurrir, por lo que se ha implementado una reventa de estas localidades de último minuto. Sabiendo esto, un total de 10 personas decide ir al espectáculo sin haber comprado entradas.

   (a) Sea X la cantidad de personas que no se presentan al espectáculo, ¿qué distribución tiene X?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que las 10 personas puedan conseguir su entrada para el espectáculo en la reventa? Si puede calcúlela y sino calcularla de forma aproximada. (*Hint: Exprese la probabilidad pedida usando la variable* X)

9. La temperatura para la cual se produce cierta reacción química es una variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} c\left(1 + x^2\right) & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   (a) Halle c.

   (b) Obtener la función de distribución acumulada $F_X(x)$.

   (c) Calcule la probabilidad de que la temperatura sea superior a 1.

   (d) En un laboratorio se producen estas reacciones en forma independiente hasta lograr la primera reacción a temperatura superior a 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera reacción a temperatura superior a 1 se produzca en la quinta experiencia?

   (e) Calcule $E(X)$ y $Var(X)$.

10. Sea X el tiempo de vida (en meses) de un componente electrónico en uso continuo. Supongamos que X sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.1$.

   (a) Halle la función de distribución acumulada de X, su esperanza, su mediana y su varianza.
   (b) Halle la probabilidad de que el tiempo de vida sea mayor que 10 meses.
   (c) Halle la probabilidad de que el tiempo de vida esté entre 5 y 15 meses.
   (d) Halle el 1% percentil, es decir el valor t tal que la probabilidad de que el tiempo de vida sea menor que t meses sea 0.01.
   (e) Calcule la probabilidad de que el tiempo de vida sea mayor que 25 meses sabiendo que superó los 15 meses. Compare los resultados de (b) y (e).

11. Sea $X \sim \mathcal{U}(0, 40)$.

   (a) Halle la función de distribución acumulada de X, su esperanza, su mediana y su varianza.
   (b) Halle la probabilidad de que X sea mayor que 10.
   (c) Calcule la probabilidad de que X sea mayor que 25 sabiendo que $X > 15$. Compare con (b).
   (d) Compare el resultado de este ejercicio con el del ejercicio anterior.

12. Sea $X \sim \mathcal{N}(16, 25)$.

   (a) Calcule utilizando la tabla:
      i. $P(X \geq 17)$
      ii. $P(X \leq 14)$
      iii. $P(X < 14)$
      iv. $P(13 < X < 20)$
      v. $P(10 \leq X < 15)$
      vi. $P(X = 16)$
   (b) Encuentre un valor a de manera tal que:
      i. $P(X < a) = 0.5$. Recuerde que a es la mediana o el 50% percentil de X.
      ii. $P(X \geq a) = 0.6$.
      iii. $P(|X - 16| < a) = 0.95$.
      iv. $P(\frac{|X-16|}{5} \leq a) = 0.95$.

13. El peso esperado o medio de un artículo que proviene de cierta línea de producción es de 83kg.

   (a) El 95% de los artículos pesan entre 81 y 85kg, calcule el desvío estándar del peso de un artículo elegido al azar de la línea de producción. ¿Qué supuestos deben hacerse para responder a esta pregunta?
   (b) Si elegimos 6 artículos al azar de la línea de producción, ¿cuál es la probabilidad de que el peso de exactamente 3 artículos diste de su valor esperado a lo sumo en 2 kg?

14. Se desea determinar una magnitud μ. Para ello se realiza una medición que denotaremos con X. El modelo para X es

$$X = \mu + \varepsilon$$

donde μ es la verdadera magnitud desconocida, y ε es la variable aleatoria que denota el error de medición. Asumimos que la esperanza de ε es cero y llamamos σ^2 a su varianza. Note que observamos a X pero ε no es observable. El supuesto de que $E(\varepsilon) = 0$ refleja la creencia en que el método de medición empleado es exacto. Es decir no produce errores sistemáticos. La varianza del error, $\sigma^2 = Var(\varepsilon)$ representa la precisión del método de medición empleado.

(a) Halle $E(X)$ y $Var(X)$.

Asuma que el error de medición tiene una distribución normal con media cero y desviación estándar σ, es decir $\varepsilon \sim N\left(0, \sigma^2\right)$.

(b) Obtenga la distribución de X, su esperanza y su varianza.

(c) Asuma que la desviación estándar $\sigma = 0.2$. Calcule la probabilidad de que la medición diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.3 unidades. Note que no fue necesario conocer el valor de μ para realizar este cálculo.

(d) Obtenga una expresión para la probabilidad de que la medición diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.3 unidades en función de σ. Estudie su monotonía. Interprete este comportamiento.

15. Sea $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Definimos $Y = aX + b$, con a y b números reales fijos, $a \neq 0$.

(a) Probar que la función de distribución acumulada de Y cumple $F_Y(t) = \begin{cases} F_X\left(\frac{t-b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right) & \text{si } a < 0 \end{cases}$

(b) Derivarla para probar que $f_Y(t) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$.

(c) Del ítem anterior, deducir que $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

16. Usando el `R`,

(a) Graficar, en un mismo gráfico, las funciones de densidad $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2)$, con $\sigma = 0.5, 1, 2$, y colorearlas en rojo, negro y azul, respectivamente. Pueden ser útiles las instrucciones que siguen.

```
xx<-seq(-5,5,by =0.01)
plot(xx,dnorm(xx,mean=0,sd=0.5),type="l",lwd=3,col="red",ylab="f(t)",xlab="t")
points(xx,dnorm(xx,mean=0,sd=1),type="l",lwd=3,col="black")
points(xx,dnorm(xx,mean=0,sd=2),type="l",lwd=3,col="blue")
```

i. ¿Qué calcula la función `dnorm`? Con `help(dnorm)` aparecerán las otras tres funciones que tiene el `R` para trabajar con la normal. Asegurate de entender las diferencias entre ellas.

ii. ¿Qué significan los argumentos `lty, lwd, col, xlab, ylab`? Descubrilo modificando los valores y viendo cómo cambian los gráficos, o usando la ayuda de la web (o la instrucción `help(par)` del `R`). Observá que el primer gráfico se logra con `plot`, pero para que se superpongan las curvas al gráfico anterior (sin que se abra un nuevo gráfico) hay que usar la instrucción `points`.

(b) Graficar, en un mismo gráfico, las funciones de densidad $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 1)$, con $\mu = -2, 1, 2$, coloreando cada curva con un color distinto.

(c) Graficar las funciones de frecuencia o probabilidad puntual de una $Bi(n = 10, \theta)$, con $\theta = 0.05, 0.2, 0.5, 0.8$. Puede ser útil probar el argumento `type="h"`.

(d) Graficar las funciones de probabilidad puntual de una $Bi(n, \theta = 0.2)$, con $n = 10, 50, 100$.

(e) Haga en `R` las cuentas de los ejercicios 4, 12 a), 13.

17. Sea X una variable aleatoria con $E(X) = \mu_X$ y $V(X) = \sigma_X^2$.

(a) Hallar la esperanza y varianza de $Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$.

(b) ¿Es la distribución de Y normal?