

**ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Primer cuatrimestre 2018**

**Práctica 1**

**Operaciones vectoriales (I)**

1. Dados los vectores  $\vec{u} = (1, 2)$ ,  $\vec{v} = (-1, 3)$  y  $\vec{w} = (-1, -2)$  calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:

(a)  $\vec{u} + \vec{v}$ ;  $\vec{v} + \vec{w}$ . (c)  $3\vec{u} + 3\vec{v}$ ;  $3(\vec{u} + \vec{v})$ .  
 (b)  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ ;  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ . (d)  $\vec{u} - \vec{v}$ .

2. Sea  $\vec{w} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ . Graficar en el plano:

(a)  $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}\}$ .  
 (b)  $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ .  
 (c)  $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$ .

3. Dados los vectores  $\vec{u} = (0, 1, 2)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  y  $\vec{w} = (-1, 1, 1)$  calcular las operaciones:

(a)  $\vec{u} + \vec{v}$ . (d)  $2\vec{u}$ .  
 (b)  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ . (e)  $-3\vec{w}$ .  
 (c)  $\vec{u} - \vec{v}$ . (f)  $-\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$ .

4. En el bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa  $\alpha$ , 148 de cepa  $\beta$  y 290 de cepa  $\gamma$ . Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa  $\alpha$ , 48 de cepa  $\beta$  y 110 de cepa  $\gamma$ . A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primera cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Calcular el vector  $PI$  de población inicial, el vector  $N_7$  de natalidad durante julio, el vector  $M_7$  de mortalidad durante el mismo mes y el vector  $PF$  de población final al terminar el mes.

5. Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre  $P = (1, 4)$  y  $Q = (3, 2)$ .

6. Dados los puntos  $A = (1, 7, 3)$ ,  $B = (-1, 3, 0)$  y  $C = (3, -4, 11)$  determinar:

(a) los vectores  $\overrightarrow{AB} = B - A$  y  $\overrightarrow{BC} = C - B$ .  
 (b) el punto medio entre los puntos  $A$  y  $B$ .

7. Dados los vectores  $\vec{v} = (1, -2, 2)$ ,  $\vec{w} = (2, 0, 3)$  y  $\vec{z} = (4, 4, 4)$  realizar las operaciones:

(a)  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ;  $\vec{w} \cdot \vec{v}$ .  
 (b)  $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}$ ;  $(\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z})$ .  
 (c)  $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$ ;  $3(\vec{v} \cdot \vec{w})$ .  
 (d)  $\vec{v} \cdot \vec{v}$ ;  $\vec{w} \cdot \vec{w}$ .

8. Calcular el módulo (o norma) de los vectores de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  según corresponda:

(a)  $\vec{u} = (1, 2)$ ,  $\vec{v} = (-1, -2)$ ,  $\vec{w} = (-3, 4)$ ,  $\vec{z} = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$ .  
 (b)  $\vec{u} = (0, 1, 2)$ ,  $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ ,  $\vec{w} = (0, 1, 2) + (-1, 1, 1)$ .  
 (c)  $\vec{u} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{v} = -2 \cdot (2, -1, 3)$ ,  $\vec{w} = 2 \cdot (2, -1, 3)$ .

9. Normalizar cada uno de los vectores del ejercicio anterior.
10. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:
- (a)  $A = (1, -3)$ ;  $B = (0, 0)$ .                      (c)  $C = (1, 2, 3)$ ;  $D = (4, 1, -2)$ .  
 (b)  $A = (1, -3)$ ;  $B = (4, 1)$ .                      (d)  $C = (4, -2, 6)$ ;  $D = (3, -4, 4)$ .
11. Determinar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  que verifican:
- (a)  $\vec{v} = (4, k)$  y  $\|\vec{v}\| = 5$ .  
 (b)  $\vec{v} = (1, k, 0)$  y  $\|\vec{v}\| = 2$ .  
 (c)  $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$  y  $\|\vec{v}\| = 1$ .  
 (d)  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (k, -k, 2)$  y  $d(A, B) = 2$ .
12. Sea  $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ . Graficar en el plano los siguientes conjuntos:
- (a)  $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| = 1\}$ .                      (c)  $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| = 1\}$ .  
 (b)  $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| \leq 1\}$ .                      (d)  $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| \leq 1\}$ .
13. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:
- (a)  $\vec{v} = (2, 2)$ ;  $\vec{w} = (3, -3)$ .                      (c)  $\vec{v} = (1, 1, 1)$ ;  $\vec{w} = (1, 0, 1)$ .  
 (b)  $\vec{v} = (2, -3)$ ;  $\vec{w} = (0, 0)$ .                      (d)  $\vec{v} = (1, 2, 3)$ ;  $\vec{w} = (5, 1, -2)$ .
14. Hallar:
- (a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector  $\vec{v} = (1, 4)$ .  
 ¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.  
 (b) Todos los vectores de  $\mathbb{R}^2$  que son ortogonales a  $\vec{v} = (2, -2)$  y tienen norma 1.  
 (c) Tres vectores de  $\mathbb{R}^3$ , distintos entre sí, que sean ortogonales al vector  $\vec{v} = (1, -3, 4)$ .  
 (d) Un vector de  $\mathbb{R}^3$  que sea ortogonal a  $\vec{v} = (-1, 0, 2)$  y de norma 2. ¿Es único?  
 (e) Dos vectores ortogonales a  $\vec{v} = (3, 2, 7)$  que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).
15. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:
- (a)  $\vec{v} = (1, 0)$ ;  $\vec{w} = (0, 1)$ .                      (c)  $\vec{v} = (1, -1, 0)$ ;  $\vec{w} = (0, 1, 1)$ .  
 (b)  $\vec{v} = (1, 1)$ ;  $\vec{w} = (0, 1)$ .                      (d)  $\vec{v} = (1, -1, 1)$ ;  $\vec{w} = (5, 1, -2)$ .
- 16.\* Dados  $\vec{u} = (3, 2, -1, 0)$  y  $\vec{v} = (0, 1, 2, \frac{1}{7})$  determinar:
- (a) el ángulo entre ambos vectores.  
 (b) el módulo de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{v}$ .
17. Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  en  $\mathbb{R}^3$  dos vectores que verifican  $\|\vec{u}\| = 1$  y  $\|\vec{v}\| = 3$ . ¿Es posible que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ ? Justificar.
18. Calcular el producto vectorial  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$  para los siguientes pares de vectores:
- (a)  $\vec{u} = (1, -2, -4)$ ;  $\vec{v} = (1, -2, -4)$ .                      (c)  $\vec{u} = (2, 1, -3)$ ;  $\vec{v} = (1, -2, -4)$ .  
 (b)  $\vec{u} = (1, -2, -4)$ ;  $\vec{v} = (2, 1, -3)$ .                      (d)  $\vec{u} = (2, 0, 0)$ ;  $\vec{v} = (0, 0, 3)$ .
- En cada caso, verificar que  $\vec{w}$  es ortogonal tanto a  $\vec{u}$  como a  $\vec{v}$ .
19. Sean  $\vec{u} = (1, 2, -3)$ ,  $\vec{v} = (-1, 5, 2)$ ,  $\vec{w} = (1, 2, 4)$  y  $\vec{z} = (2, -4, 8)$ . Hallar en  $\mathbb{R}^3$ :
- (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . ¿Es único?  
 (b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a  $\vec{w}$  y  $\vec{z}$ .  
 (c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a  $\vec{w}$  y  $\vec{z}$ . ¿Es único?