

---

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO / CÁLCULO NUMÉRICO

Primer Cuatrimestre 2018

---

## Práctica N° 8: Integración Numérica - Métodos Multipaso

**Ejercicio 1** Interpolando las funciones de base de Lagrange, hallar una fórmula de cuadratura por interpolación de la forma

$$\int_0^{2h} f(x) dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h).$$

Para  $f$  una función  $C^2$  probar que el error cometido no excede el valor  $\frac{\|f''\|_\infty}{2} h^3$ .

**Ejercicio 2** Usar el método de coeficientes indeterminados para dar una fórmula de cuadratura por interpolación:

$$\int_0^{3h} f(x) dx \sim A_0 f(0) + A_1 f(h) + A_2 f(3h).$$

**Ejercicio 3** Construir la fórmula abierta de Newton-Cotes para calcular  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  con nodos  $-1/2, 0, 1/2$ , y la fórmula cerrada de Newton-Cotes con nodos en los puntos  $-1, -1/3, 1/3, 1$ .

**Ejercicio 4** Considerar la función definida en  $[-h, h]$  ( $h > 0$ ):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -h \leq x \leq 0 \\ x, & \text{si } 0 < x \leq h. \end{cases}$$

Hallar el error de la regla de trapecios aplicada a  $f(x)$ . ¿El orden es igual al obtenido para una función suficientemente suave?

**Ejercicio 5** La fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x) dx \sim f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

es conocida como *Regla de los Rectángulos*. Para  $f \in C^1[a, b]$  acotar el error que se comete al utilizarla.

**Ejercicio 6** a) Hallar una fórmula de cuadratura del tipo:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \sim Af(-2) + Bf(0) + Cf(2).$$

b) Para  $f \in C^3[-2, 2]$  probar que el error cometido no excede el valor  $\frac{7}{12} \|f^{(3)}\|_\infty$ .

**Ejercicio 7** Escribir programas que reciban una función  $f$  y los límites del intervalo  $[a, b]$ , y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson para aproximar  $\int_a^b f$ .

**Ejercicio 8** Escribir programas que reciban una función  $f$ , los límites del intervalo  $[a, b]$  y un parámetro  $n$ , y utilicen las reglas de trapecios y de Simpson compuestas para aproximar  $\int_a^b f$ , partiendo  $[a, b]$  en  $n$  intervalos.

**Ejercicio 9** Se desea implementar una regla de cuadratura *adaptiva*, es decir, una cuadratura compuesta que utilice más subintervalos en la zona en que la aproximación obtenida sea peor. Para ello, notamos  $S(a, b)$  a la regla de Simpson en el intervalo  $[a, b]$ . Si notamos  $c = \frac{a+b}{2}$ , se tiene que:

$$|S(a, b) - S(a, c) - S(c, b)|/15 \sim E(a, c, b),$$

donde  $E(a, c, b)$  es el error cometido al aplicar la regla compuesta:  $S(a, c) + S(c, b)$ . Implementar un programa que reciba como input una función  $f$ , un intervalo  $[a, b]$  y una tolerancia  $\varepsilon$  y calcule las cuadraturas:  $q = S(a, b)$ ,  $q_1 = S(a, c)$  y  $q_2 = S(c, b)$ . Si  $|q - q_1 - q_2| < 15\varepsilon$ , se devuelve el valor  $q_1 + q_2$ . En caso contrario, se aplica el mismo criterio para integrar  $f$  en los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$ , con una tolerancia  $\varepsilon/2$ .

Probar el programa calculando  $\int_0^1 xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$ . Comparar los resultados (y los tiempos de ejecución) con los obtenidos por la regla de Simpson compuesta.

**Ejercicio 10** Se sabe que  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ .

a) Para  $n = 1, \dots, 100$ , utilizar las reglas de trapecios y Simpson compuestas para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a  $\pi$ .

b) Graficar las sucesiones obtenidas junto con el valor de  $\pi$  que arroja `Octave` y el valor que se obtiene al aplicar el programa del ejercicio anterior.

**Ejercicio 11** a) Calcular exactamente la integral

$$I = \int_0^{2\pi} [1 - \cos(32x)] dx.$$

b) Aproximar el valor de  $I$  usando el programa del Ejercicio 7 con los métodos de los trapecios, Simpson, trapecios compuesta y Simpson compuesta para  $n = 2, 4, 8$  y  $16$ .

c) Calcular el valor de  $I$  que produce el programa del ejercicio 9.

**Ejercicio 12** Se quiere calcular  $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$  utilizando la regla de trapecios compuesta, partiendo el intervalo  $[-1, 1]$  en  $n$  subintervalos. Hallar  $n$  de modo que el error sea menor que  $10^{-3}$ .

**Ejercicio 13** Determinar el grado de precisión de las fórmulas para  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ :

a)  $\frac{4}{3}f(-0.5) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f(0.5)$ .

b)  $\frac{1}{4}f(-1) + \frac{3}{4}f(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}f(1)$ .

**Ejercicio 14** Hallar reglas de cuadratura de grado de precisión máximo para aproximar  $\int_{-3}^3 f(x) dx$ , de las siguientes formas:

a)  $A[f(x_0) + f(x_1)]$  (repetiendo el coeficiente).

b)  $Af(x_0) + Bf(x_0 + 4)$ .

y determinar cuáles son dichos grados.

**Ejercicio 15** Sea  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente positiva. Se tiene una fórmula de cuadratura en el intervalo  $[a, b]$  de la forma:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \sim \sum_{i=1}^n A_i f(x_i). \quad (1)$$

Aplicando un cambio de variables, obtener, a partir de (1), una cuadratura para el intervalo  $[c, d]$ , de la forma

$$\int_c^d f(x)w(x) \sim \sum_{i=1}^n B_i f(y_i).$$

Calcular los coeficientes  $B_i$  en función de los  $A_i$  y los nodos  $y_i$  en función de los  $x_i$ . ¿Tiene la cuadratura en  $[c, d]$  el mismo grado de precisión que la cuadratura en  $[a, b]$ ?

**Ejercicio 16** Calcular  $\int_{-1}^1 f(x)x^2 dx$  mediante una regla decuadratura de la forma

$$\int_{-1}^1 f(x)x^2 dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que 3.

**Ejercicio 17** a) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_{-1}^1 f(x)\sqrt{|x|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado?

b) Hallar una regla de cuadratura del siguiente tipo

$$\int_0^4 f(x)\sqrt{\left|\frac{x-2}{2}\right|}dx \sim A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1).$$

que tenga grado de precisión máximo. ¿Cuál es dicho grado? Sugerencia: Usar el ejercicio 15.

**Ejercicio 18** Sea  $w$  una función de peso. Se considera la regla de cuadratura de 1 punto:

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \sim A_0 f(s).$$

- a) Probar que, cualquiera sea  $w$ , la fórmula tiene grado de precisión máximo si  $s = \frac{\int_a^b xw(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}$ .
- b) Probar que si  $w(x) \equiv 1$ , esta regla coincide con la regla de los rectángulos.
- c) Considerar el intervalo  $[-1, 1]$  y  $w(x) = (x - 1)^2$ . Acotar el error que produce el uso de esta regla para funciones  $C^1$ .

**Ejercicio 19** Hallar los pesos y los nodos de las fórmulas de Gauss-Legendre de dos y tres puntos. (Los polinomios de Legendre mónicos de grado dos y tres son  $x^2 - \frac{1}{3}$  y  $x^3 - \frac{3}{5}x$ ).

**Ejercicio 20** Probar que una fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \sim Q_n(f) = \sum_{j=0}^n A_j f(x_j)$$

no puede tener grado de precisión mayor que  $2n + 1$ , independientemente de la elección de los coeficientes  $(A_j)$  y de los nodos  $(x_j)$ .

Sugerencia: Hallar un polinomio  $p \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$  para el cual  $Q_n(p) \neq \int_a^b p(x)w(x) dx$ .

---

## Métodos Multipaso

**Ejercicio 21** Considerar la ecuación  $y'(t) = f(t, y(t))$ .

- a) Deducir la fórmula de Milne:

$$y_n = y_{n-2} + h\left(\frac{1}{3}f_n + \frac{4}{3}f_{n-1} + \frac{1}{3}f_{n-2}\right),$$

aproximando la integral

$$\int_{t_{n-2}}^{t_n} f(t, y(t))dt = \int_{t_{n-2}}^{t_n} y'(t)dt = y(t_n) - y(t_{n-2}),$$

con la fórmula de Simpson. Usar el Ejercicio 15.

- b) Proceder en forma análoga al ítem anterior y dar un método multipaso de la forma

$$y_{n+1} - y_n = h[Af_n + Bf_{n-1} + Cf_{n-2}].$$

- c) Analizar la convergencia (estabilidad y consistencia) de los métodos de los ítems anteriores y calcular su orden.

**Ejercicio 22** Analizar la convergencia de los siguientes métodos y calcular su orden.

a) **Adams-Bashforth.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n).$$

b) **Adams-Moulton.**

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(5f_{n+3} + 8f_{n+2} - f_{n+1}).$$

**Ejercicio 23** Considerar el método de 2 pasos

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + ay_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_{n+1}).$$

Determinar  $a, \beta_2, \beta_1, \beta_0$  de modo que el método resultante tenga orden 4.

**Ejercicio 24** Decidir si existe algún valor de  $a \in \mathbb{R}$  para el cual el siguiente método multipaso sea convergente:

$$y_{n+3} - 3y_{n+2} + (3 - a^2)y_{n+1} + (a^2 - 1)y_n = h[5f_{n+2} + (-a^2 - 5)f_n].$$