ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Primer Cuatrimestre 2018 – Práctica Singular 9

Descomposición primaria

1. Sea $I = \langle xz - y^2, x^3 - yz, z^2 - x^2y \rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, z]$.

   (a) Comprobar que I es un ideal primo.

   (b) Demostrar que $J = I^2$ no es un ideal primario de las siguientes formas:

   i. Calcular la descomposición primaria de J usando el procedimiento `primdecGTZ` de la biblioteca `primdec`.

   ii. Encontrar polinomios p_1, p_2 tales que $\sqrt{J : p_1}$ y $\sqrt{J : p_2}$ sean ideales primos distintos.

   iii. Encontrar un polinomio $p \in J$ tal que $p = fg$ con $f \notin J$ y $g \notin \sqrt{J}$.

   Nota: En todos los ítems puede utilizar cualquier procedimiento de Singular.

2. Para el ideal I del ejercicio anterior, encontrar polinomios p_1, p_2 tales que $J : p_1$ y $J : p_2$ sean ideales primos distintos.

   Sugerencia: utilizar las siguientes propiedades

   - Para ideales $Q_1, Q_2 \subset k[x]$ y $f \in k[x]$, $(Q_1 \cap Q_2) : f = (Q_1 : f) \cap (Q_2 : f)$.
   - Si Q es un ideal y $f \in Q$, $Q : f = \langle 1 \rangle$.
   - Si Q es un ideal P-primario y $f \notin Q$, entonces $Q : f$ es un ideal P-primario. $f \in P$ si y solo si $Q \subsetneq Q : f$.