ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2018– Práctica 8

Descomposición primaria y cocientes

(**1**) Sean $I, J \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ideales. Se define el cociente de I por J como:
$$(I : J) := \{ f \in K[X_1, \dots, X_n] : f\, g \in I, \ \forall\, g \in J \}.$$
Probar que:

- $(I : J)$ es un ideal que contiene a I.
- $1 \in (I : J) \iff J \subseteq I$.
- Si $I_i, J_i,\ 1 \le i \le r$, son ideales, $(\bigcap_i I_i : J) = \bigcap_i (I_i : J)$ e $(I : \sum_i J_i) = \bigcap_i (I : J_i)$.

(**2**) Dar un algoritmo para calcular un sistema de generadores de $(I : \langle f_1, \dots, f_s \rangle)$.

(**3**) Sean $V, W \subset K^n$ dos variedades. Se define $V \setminus W := \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{x} \notin W\}$. (¿Vale en general que $V \setminus W$ es una variedad?)

- Sea $h \in K[X_1, \dots, X_n]$. Probar que $(\mathbf{I}(V) : h) = \mathbf{I}(V \setminus \mathbf{V}(h))$.
- Probar que si $K = \mathbb{C}$ e I es un ideal radical, entonces $\mathbf{V}(I : h) = \mathbf{V}(\mathbf{I}(\mathbf{V}(I) \setminus \mathbf{V}(h)))$. (Es decir $\mathbf{V}(I : h)$ es la *clausura de Zariski* de $\mathbf{V}(I) \setminus \mathbf{V}(h)$, i.e. la menor variedad que contiene a $\mathbf{V}(I) \setminus \mathbf{V}(h)$.)

(**4**) En $K[X, Y, Z]$, sea $I := \langle X, Y \rangle \cdot \langle X, Z \rangle$. Probar que
$$I = \langle X, Y \rangle \cap \langle X, Z \rangle \cap \langle X, Y, Z \rangle^2$$
es una descomposición primaria minimal de I. ¿Qué componentes son aisladas y cuáles son inmersas?

(**5**) Sea $I = \langle X^2, XY \rangle$ en $K[X, Y]$. Probar que para todo $a \in K$, $I = \langle X \rangle \cap \langle X^2, Y - a\,X \rangle$ es una descomposición primaria minimal de I. Así, si K es infinito, I tiene infinitas descomposiciones primarias distintas.

(**6**) Probar que en $K[X_1, \dots, X_n]$ los ideales $\mathcal{P}_i := \langle X_1, \dots, X_i \rangle$ son primos y sus potencias son primarios.

(**7**) Calcular la descomposición primaria en $\mathbb{Q}[X, Y]$ de $\langle Y(Y + 1)^2(Y - 1)^3, (X - Y)^2(X + Y) \rangle$.

(**8**) Calcular la descomposición primaria en $\mathbb{Q}[X, Y]$ y en $\mathbb{C}[X, Y]$ de $\langle (X^2 - 2)^2 X, Y - X \rangle$ y de $\langle (X^2 - 2)^2 X, Y^2 - X \rangle$.