ECUACIONES POLINOMIALES Y ALGORITMOS

Segundo Cuatrimestre 2018– Práctica 3

Ideales, Ordenes monomiales y Algoritmo de División en $K[X_1, \dots, X_n] =: K[\mathbf{X}]$

(**1**) Probar las siguientes igualdades de ideales en $\mathbb{Q}[X, Y]$:

(a) $\langle X + Y, X - Y\rangle = \langle X, Y\rangle$

(b) $\langle aX + bY, cX + dY\rangle = \langle X, Y\rangle$ para $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

(c) $\langle X + XY, Y + XY, X^2, Y^2\rangle = \langle X, Y\rangle$

(d) $\langle 2X^2 + 3Y^2 - 11, X^2 - Y^2 - 3\rangle = \langle X^2 - 4, Y^2 - 1\rangle$.

(**2**) Algunas diferencias entre ideales y subespacios vectoriales.

(a) Probar que el ideal $\langle X\rangle \subset K[X]$ (una variable) es un K-subespacio vectorial de $K[X]$ de dimensión infinita.

(b) Sean $f_1, f_2 \in K[\mathbf{X}]$ cualesquiera. Probar que existen infinitos pares de polinomios $g_1, g_2 \in K[\mathbf{X}]$ tales que $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 0$.

(c) Sea $I = \langle f_1, \dots, f_s\rangle \subset K[\mathbf{X}]$ y $f \in I$. Probar que existen infinitas maneras de escribir $f = h_1 f_1 + \cdots + h_s f_s$ con $h_1, \dots, h_s \in K[\mathbf{X}]$.

(**3**) Una base $\{X^\alpha,\ \alpha \in A \subset {\mathbb{N}_0}^n\}$ de un ideal monomial I se llama *minimal* si para todo $X^\alpha, X^\beta \in A$, $X^\alpha \mid X^\beta \Longrightarrow \alpha = \beta$. Mostrar que todo ideal monomial tiene una base minimal, y que ésta es única.

(**4**) Probar que el orden en $K[X, Y]$ definido por $X^\alpha Y^\beta < X^{\alpha'} Y^{\beta'} \iff \alpha + \pi\beta < \alpha' + \pi\beta'$ es un orden monomial (donde $\pi = 3.14...$). Ordenar según este orden todos los monomios de grado ≤ 4.

(**5**) **Ordenes con pesos**
Sean $<$ un orden monomial en $K[\mathbf{X}]$ y $u := (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Se define en $K[\mathbf{X}]$ el orden $<_u$ siguiente:

$$\mathbf{X}^\alpha <_u \mathbf{X}^\beta \quad \iff \quad u\cdot\alpha < u\cdot\beta \quad \text{ó} \quad u\cdot\alpha = u\cdot\beta \ \text{ y } \ \mathbf{X}^\alpha < \mathbf{X}^\beta$$

(donde $\cdot$ denota el producto escalar común de vectores).

(a) Mostrar que $<_u$ es un orden monomial (que se llama el orden con peso determinado por u y $<$).

(b) Determinar el peso u de manera de obtener como $<_u$ el orden lexicográfico graduado a partir del orden lexicográfico puro $<$.

(**6**) **Ordenes con pesos independientes**
Sea $u := (u_1, \dots, u_n)$ un vector de $\mathbb{R}^n$ tal que $u_1, \dots, u_n$ son positivos y linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$. Se define en $K[\mathbf{X}]$ el orden $<_u$ siguiente:

$$\mathbf{X}^\alpha <_u \mathbf{X}^\beta \quad \iff \quad u\cdot\alpha < u\cdot\beta$$

(donde $\cdot$ denota el producto escalar común de vectores).

(a) Mostrar que $<_u$ es un orden monomial (que se llama orden con pesos independientes). ¿Dónde se usa la independencia lineal de los u_i?

(b) Mostrar que $u = (1, \sqrt{2})$ y $u = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ dan dos ordenes con pesos independientes en $K[X, Y]$ y $K[X, Y, Z]$ respectivamente.

(**7**) Sea $I = \langle X^6, X^2Y^3, XY^7\rangle \subset K[X, Y]$.

(a) Dibujar en el plano el conjunto de vectores (m, n) que son exponentes de monomios $X^m Y^n$ que aparecen en los elementos de I.

(b) Si se aplica el algoritmo de división de Hironaka, o cualquier algoritmo de división, para $f \in K[X, Y]$, independientemente del orden monomial usado, ¿qué monomios pueden aparecer en el resto?

(**8**) Sean $f = X^7 + X^3Y^2 - Y + 1$ y $F = (XY^2 - X, X - Y^3)$.

(a) Calcular el resto y los cocientes de la división del polinomio f por el conjunto ordenado F para el orden lexicográfico $X > Y$ y para el orden diagonal ("deglex") con $X > Y$.

(b) Repetir permutando los elementos del conjunto F. ¿Qué se observa?

(**9**) Sean $f = X^3 - X^2Y - X^2Z + X$, $f_1 = X^2Y - Z$ y $f_2 = XY - 1$.

(a) Usando el orden diagonal con $X > Y > Z$ calcular:

- el resto r_1 de f por (f_1, f_2).
- el resto r_2 de f por (f_2, f_1).

¿En qué etapa aparece la diferencia entre los dos restos?

(b) Sea $r := r_1 - r_2$. ¿Pertenece r al ideal $\langle f_1, f_2\rangle \subset \mathbb{Q}[X, Y, Z]$? En caso afirmativo, hallar $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$ tales que $r = a_1f_1 + a_2f_2$.

(c) Explicitar (sin hacer cuentas) los cocientes y el resto de la división de Hironaka de r por (f_1, f_2).

(d) ¿Resuelve el algoritmo de división de Hironaka el problema de la pertenencia de un polinomio f al ideal $\langle f_1, f_2\rangle$?

(**10**) Sean $f_1 = X$, $f_2 = Y - X$ y $f_3 = 1 - YZ$ y $I = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$.

(a) Probar que $\{ (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tq } f(x, y, z) = 0 \ \forall f \in I \}$ es vacío.

(b) Probar que para cualquier orden monomial que se considere y para cualquier orden de los polinomios f_1, f_2, f_3, el resto de la división de Hironaka del polinomio 1 por los generadores de I es no nulo.

(c) Mostrar que sin embargo $1 \in I$ exhibiendo a_1, a_2, a_3 tales que $1 = a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$.

(**11**) Sea $I = \langle Y - X^2, Z - X^3\rangle \subset \mathbb{C}[X, Y, Z]$

(a) Mostrar que todo $f \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ puede escribirse en la forma:

$$f = a_1(X, Y, Z)(Y - X^2) + a_2(X, Y, Z)(Z - X^3) + r(X)$$

donde $r(X) \in \mathbb{C}[X]$ es un polinomio puro en X.

(b) ¿Corresponde esto a efectuar la división de Hironaka para algún orden adecuado?

(c) Mostrar que en este caso $f \in I$ si y solo si $r = 0$. ¿Qué hay de diferente aquí que en el caso de los dos ejercicios anteriores?