

## Práctica 5: Flujos y Conjuntos Invariantes

---

1. Dibujar el flujo  $\varphi_t$  de los siguientes sistemas lineales  $\dot{x} = Ax$  y describir  $\varphi_t(B(x_0, \varepsilon))$  para  $x_0 = (-3, 0)$ .

a)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Determinar el flujo  $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  para el sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

con  $f(x, y) = (-x, 2y + x^2)$ , y mostrar que  $S = \{(x, y) : y = \frac{-x^2}{4}\}$  es invariante respecto a  $\varphi_t$ .

3. Determinar el flujo  $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  para el sistema no lineal (1) con  $f(x, y, z) = (-x, -y + x^2, z + x^2)$ , y mostrar que  $S = \{(x, y, z) : z = \frac{-x^2}{3}\}$  es invariante respecto a  $\varphi_t$ .

4. Sea  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el flujo asociado a (1). Sea  $M \subset \mathbb{R}^n$  acotado y medible y  $V = \int_M dx$ . Definimos  $M(t) = \varphi_t(M)$  y  $V(t) = \int_{M(t)} dx$ . Probar que

$$\dot{V}(t) = \int_{M(t)} \operatorname{div}(f(x)) dx.$$

**Definición.** Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el flujo asociado a (1). Un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  se dice un punto periódico si existe algún  $T \neq 0$  tal que

$$\varphi_{t+T}(x) = \varphi_t(x) \quad \forall t.$$

5. Sea  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  y  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el flujo asociado a (1). Probar que

a)  $x$  es un punto periódico si y solo si existe  $T \neq 0$  tal que  $\varphi_T(x) = x$ .

b) Si  $x$  es un punto periódico, pero no punto de equilibrio, entonces existe un período mínimo  $T$  de  $x$  y  $\{Tn : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$  es exactamente el conjunto de todos los períodos.

6. Sean  $f \in C^1$ ,  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el flujo asociado a (1) y  $M \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y positivamente invariante respecto a  $\varphi_t$ . Probar que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{dist}(x + tf(x), M)}{t} = 0 \quad \forall x \in M.$$

7. Sean  $f \in C^1$ ,  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el flujo asociado a (1) y  $M \subset \mathbb{R}^n$ . Probar que

- a) Si  $M$  es invariante respecto a  $\varphi_t$  entonces  $\overline{M}$  también lo es.
- b) Si  $M$  es cerrado,  $M$  es positivamente invariante respecto a  $\varphi_t$  si y solo si  $\forall x \in M$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\varphi_t(x) \in M \forall t \in [0, \epsilon)$ .
- c)  $M$  es invariante respecto a  $\varphi_t$  si y solo si  $M^c$  es invariante respecto a  $\varphi_t$ .
- d) Si  $M$  es invariante respecto a  $\varphi_t$  entonces  $\text{int}(M)$  también lo es.
- e) Si  $M$  es invariante respecto a  $\varphi_t$  entonces  $\partial M$  también lo es. Si  $\partial M$  es invariante respectoa  $\varphi_t$  entonces  $\overline{M}$  y  $\text{int}(M)$  tambien lo es.

### Linealización

8. Clasificar los puntos de equilibrio del sistema no lineal (1) con  $f(x)$  dada por

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{pmatrix} x_1 - x_1x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} & d) \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix} \\
 b) \begin{pmatrix} -4x_2 + 2x_1x_2 - 8 \\ 4x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix} & \\
 c) \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_1x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} & e) \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ kx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - x_3 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

9. Mostrar que la función  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $H(x) = (x_1, x_2 + x_1^2, x_3 + \frac{x_1^2}{3})$  tiene una función inversa  $H^{-1}$  y que el sistema lineal (1) con

$$f(x) = (-x_1, -x_2 + x_1^2, x_3 + x_1^2)$$

se transforma en el sistema lineal

$$\dot{y} = Df(0)y$$

bajo la función  $H$ , i.e., si  $y = H(x)$  mostrar que  $\dot{y} = Df(0)y$ .

### Teorema de la Variedad Estable

10. Escribir el sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1 + 6x_2 + x_1x_2 \\
 \dot{x}_2 &= 4x_1 + 3x_2 - x_1^2
 \end{aligned}$$

en la forma

$$\dot{y} = By + G(y)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  y  $G(y)$  es cuadrática en  $y_1$  e  $y_2$ .

11. Encontrar las tres primeras aproximaciones sucesivas  $u^{(1)}(t, a)$ ,  $u^{(2)}(t, a)$  y  $u^{(3)}(t, a)$  para

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2\end{aligned}$$

y usar  $u^{(3)}(t, a)$  para aproximar  $S$  cerca del origen. Aproximar también la variedad inestable,  $U$  cerca del origen. Observar que  $u^{(2)}(t, a) = u^{(3)}(t, a)$  y por lo tanto  $u^{(j+1)}(t, a) = u^{(j)}(t, a)$  para  $j \geq 2$ . Entonces  $u^{(j)}(t, a) \rightarrow u(t, a) = u^{(2)}(t, a)$  que da exactamente la función que define  $S$ .

12. Resolver el sistema del problema anterior, y mostrar que  $S$  y  $U$  están dadas por

$$S : x_2 = -\frac{x_1^2}{3}$$

y

$$U : x_1 = 0.$$

Esbozar  $S, U, E^s$  y  $E^u$ .

13. Hallar las cuatro primeras aproximaciones sucesivas  $u^{(1)}(t, a)$ ,  $u^{(2)}(t, a)$ ,  $u^{(3)}(t, a)$  y  $u^{(4)}(t, a)$  para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_2^2.\end{aligned}$$

Mostrar que  $u^{(j)}(t, a) = u^{(3)}(t, a)$  para todo  $j \geq 3$  y concluir que  $u(t, a) = u^{(3)}(t, a)$ . Hallar  $S$  y  $U$  para este problema.

14. Mostrar que el diagrama de flujo del sistema lineal perturbado

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xr^2 \sin\left(\frac{\pi}{r}\right) \\ \dot{y} = x + yr^2 \sin\left(\frac{\pi}{r}\right) \end{cases}$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2$ , tiene el siguiente comportamiento cualitativo: existe una sucesión de círculos concéntricos centrados en  $(0, 0)$  con radio  $\frac{1}{n}$  tales que las órbitas se espiralan alternativamente acercándose y alejándose de cada uno de ellos en el sentido positivo.

15. Sea

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2, & x_1(0) &= \xi_1 \geq 0 \\ \dot{x}_2 &= dx_2 - ex_1x_2, & x_2(0) &= \xi_2 \geq 0 \end{aligned}$$

donde  $a, b, d, e$  son constantes positivas.

- Encontrar los puntos de equilibrio.
- Hallar sus variedades estable e inestable.

c) Demostrar que

$$G_1 = \left\{ (x_1, x_2) / 0 < x_1 < \frac{d}{e}, x_2 > \frac{a}{b} \right\}$$

y

$$G_2 = \left\{ (x_1, x_2) / 0 < x_2 < \frac{a}{b}, x_1 > \frac{d}{e} \right\},$$

son conjuntos positivamente invariantes.

d) Dibujar aproximadamente el diagrama de fases.

### Teorema de Hartman-Grobman

16. Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 \end{aligned}$$

y probar que las aproximaciones sucesivas  $\phi_k \rightarrow \phi$  y  $\psi_k \rightarrow \psi$  cuando  $k \rightarrow \infty$  para todo  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Definir  $H_0 = (\phi, \psi)^T$  y usar este homeomorfismo para encontrar

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds.$$

Usar el homeomorfismo  $H$  para encontrar las variedades estables e inestables  $W^s(0) = H^{-1}(E^s)$  y  $W^u(0) = H^{-1}(E^u)$  para este sistema.

Ayuda: Tienen que obtener,  $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3^2/3, x_3)^T$

$$W^s(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\}$$

y

$$W^u(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0, x_2 = x_3^2/3\}.$$