Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2018

Transformada de Fourier

Ejercicio 1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha x}$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y-\alpha)$.
2. Si $g(x) = f(x-\alpha)$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)e^{-2\pi i\alpha y}$.
3. Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, entonces $\hat{g}(y) = \lambda^n \hat{f}(\lambda y)$.
4. Si $g(x) = -2\pi i x_k f(x)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f}$ es derivable respecto a y_k y $\partial_{y_k}\hat{f} = \hat{g}$.

Ejercicio 2. Mostrar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Ejercicio 3. Probar que si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = f(-x)$. Concluir que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} = \lambda f$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces λ es una raíz cuarta de la unidad.

Ejercicio 4. Probar que la transformada de Fourier de una función f será una función real si y sólo si f es par.

Ejercicio 5. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

$$\mathbf{1}_{[-1,1]}, \quad \exp(-a|x|), \quad \frac{1}{(1+x^2)}, \quad \exp(-\pi x^2).$$

Ejercicio 6. Sea $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función L^1. Se definen

1. La Transformada-coseno de Fourier como
$$\mathcal{F}_c[f](y) = \int_0^\infty f(x)\cos(xy)\,dx.$$
2. La Transformada-seno de Fourier como
$$\mathcal{F}_s[f](y) = \int_0^\infty f(x)\sin(xy)\,dx.$$

Mostrar que si se extiende f como una función par a toda la recta, tenemos

$$\mathcal{F}_c[f](y) = \pi\mathcal{F}[f](y),$$

y que si se extiende a f como una función impar, se tiene

$$\mathcal{F}_s[f](y) = \frac{\pi}{i}\mathcal{F}[f](y).$$

Ejercicio 7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz no singular. ¿Cómo se relacionan la transformada de Fourier de $f(Ax)$ con la de $f(x)$? ($f \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Usar este resultado para mostrar que la transformada de Fourier tranforma funciones radiales en funciones radiales.

Ejercicio 8. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es de soporte compacto, entonces $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 9. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} = 0$ entonces $f = 0$.

Ejercicio 10. Sea $f \in \mathcal{S}$. Probar que $f * f = f$ si y sólo si $f = 0$ a.e. ¿Qué sucede si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

Ejercicio 11.

1. Probar que si ϕ, ϕ' y ϕ'' pertenecen al conjunto
$$L^1(\mathbb{R}) \cap \left\{ g \in C(\mathbb{R})\colon \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0 \right\}$$
entonces existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}[f] = \phi$.

2. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto y $U \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $K \subset U$. Probar que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}[f](y) = 1$ para todo $y \in K$ y $\mathcal{F}[f](y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R} - U$.
3. Probar que $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R})]$ es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito. (Sug.: Stone-Weierstrass)

Ejercicio 12. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solucón explícita de la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ = \{y > 0\}, \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 13. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^n,$$

donde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 14. Idem el ejercicio anterior para la ecuación de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde u y g son funciones a valores complejos y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 15. Obtener la expresión integral de la solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde $f, g \in \mathcal{S}$.