

Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2018

SERIES DE FOURIER Y SEPARACIÓN DE VARIABLES

Ejercicio 1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ medible e integrable en $[-p, p]$ y tal que $f(x + 2p) = f(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}$. Verificar los siguientes resultados.

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$, se verifica

$$\int_{a-p}^{a+p} f(t) dt = \int_{-p}^p f(t) dt.$$

2. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\int_{2p}^{2p+x} f(t) dt = \int_0^x f(t) dt.$$

3. Si se define g como

$$g(x) := \int_0^x f(t) dt,$$

entonces $g(x + 2p) = g(x)$ si y sólo si

$$\int_{-p}^p f(t) dt = 0.$$

4. Verificar la siguiente identidad:

$$\frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)(p-x) dx = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n\omega_0},$$

donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $\omega_0 = \pi/p$.

Ejercicio 2. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

- $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$
- $f(x) = x \quad (0 \leq x < \pi)$

Ejercicio 3. Resolver, separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 < x < \pi, 0 < y < A \\ u(0, y) = 0 \\ u(\pi, y) = 0 \\ u(x, A) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Ejercicio 4. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos:

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0 & 0 < x < \ell, t > 0 \\ u(0, t) = 0 & t > 0 \\ u(\ell, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 < x < \ell \\ u_t(x, 0) = g(x) & 0 < x < \ell \end{cases}$$

Ejercicio 5. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, se busca $u = u(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D \\ u(x, 0) = f_1(x) \\ u(1, y) = f_2(y) \\ u(x, 1) = f_3(x) \\ u(0, y) = f_4(y) \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resolver:

$$\begin{cases} u_t - k^2 \partial_x^2 u + cu = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Sugerencia: Proponer $v(x, t) = u(x, t)e^{ct}$.

Ejercicio 7. En los ejercicios 1 a 3, imponer condiciones sobre las funciones f , g o f_i (según corresponda), de modo tal que las series obtenidas sean efectivamente soluciones del problema.

Ejercicio 8. Resolver en $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$:

$$\begin{cases} \Delta u + u_x = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, \pi) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(\pi, y) = \sin(y) \end{cases} .$$

Ejercicio 9. Resolver en $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = x^2 \\ u(x, \pi) = 0 \\ u_x(0, y) = 0 \\ u_x(\pi, y) = 0 \end{cases}$$

Mostrar que la serie obtenida es solución del problema.

Ejercicio 10. Resolver, analizando la validez de la solución, la ecuación de Laplace en un disco en \mathbb{R}^2 .

$$1. \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x| < 1 \\ u = f & \text{en } |x| = 1 \end{cases} \text{ donde } f \in C^1(\{|x| = 1\}).$$

(Sugerencia: pasar a coordenadas polares).

$$2. \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x| < 1 \\ \partial_{\mathbf{n}} u = f & \text{en } |x| = 1 \end{cases}$$

donde f es como en el item 1, $\int_{|x|=1} f dS = 0$ y u se anula en el origen.

Probar que el item 2 no tiene solución si $\int_{|x|=1} f dS \neq 0$.

Ejercicio 11. Consideremos el siguiente problema en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times (0, \infty) \\ u = f & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u_t = 0 & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times (0, \infty) \end{cases}$$

(la solución representa el pequeño movimiento transversal de una membrana circular fija en sus extremos)

Mostrar que, cuando se buscan soluciones de la forma $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ al aplicar el método de separación de variables, se obtiene para R la ecuación:

$$(rR')' - \frac{m^2}{r}R + \lambda rR = 0.$$

Ejercicio 12. Aplicar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de conducción de calor en un cilindro circular infinito.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(|x|) & x \in B_1(0) \end{cases}$$

donde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

Sugerencia: Pasar a coordenadas polares y, dado que el dato inicial es independiente de θ , buscar soluciones independientes de θ .

Ejercicio 13. Verificar por el método de separación de variables, que el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } Q := (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 0 & \text{en } \partial Q \end{cases}$$

tiene como soluciones a

$$u_{k,j}(x, y) = \sin(\pi j x) \sin(\pi k y), \quad \lambda_{k,j} = \pi(j^2 + k^2).$$

para todo $j, k \in \mathbb{N}$.