Resolución del Segundo Parcial

Ejercicio 1. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \to X$ continua tal que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$, $\forall x, y \in X$. Probar que f es un homeomorfismo.
Sugerencia: Dado $a \notin f(X)$ considere el conjunto $\{f^n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución. Queremos probar que f es un homeomorfismo. Ya sabemos que f es continua, por lo que nos resta ver que es inversible y que la inversa es continua. Recordemos que si tenemos una función continua definida sobre un compacto ya sabemos que es cerrada. Con lo cual, de ser inversible, su inversa va a ser continua. Entonces, nos basta probar que f es inyectiva y sobreyectiva.
Veamos que la f es inyectiva. Queremos ver que si tenemos $x, y \in X$ con $f(x) = f(y)$, entonces x e y deben ser el mismo punto, $x = y$. Esto se deduce fácilmente de que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$:

$$f(x) = f(y) \implies d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) = 0 \implies x = y.$$

Pasemos ahora a probar que la f es sobreyectiva. Vamos a proceder por el absurdo. Supongamos que no, que la f no es sobreyectiva. Esto es $\exists x \in X$ tal que $x \notin f(X)$, x no está en la imagen. Pero no solo no está en la imagen si no que esta "separado" de la imagen. Como X es compacto y f es continua sabemos que $f(X)$ es compacto. Como la distancia entre un punto y un compacto se realiza, dado que $x \notin f(X)$, sabemos que $d(x, f(X)) > 0$. Si tomamos ε, $0 < \varepsilon < d(x, f(X))$, tenemos

$$d(x, y) > \varepsilon \quad \forall y \in f(X).$$

Ahora, consideramos la sucesión

$$x_n = f^{(n)}(x) = \overbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}^{f \text{ aplicada } n \text{ veces}}.$$

La podemos definir inductivamente como

$$x_0 = x$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Como vimos antes x está separado de la imagen de f, por lo que en particular está separado de todos los x_n para $n \geq 1$, esto es

$$d(x, x_n) > \varepsilon$$

para todo $n \geq 1$.
Ahora, usando que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ $\forall x, y \in X$ podemos ver que los x_n no solo están separados de x si no que están todos separados entre sí. Por ejemplo

$$d(x_1, x_2) = d(f(x), f(f(x))) = d(x, f(x)) > \varepsilon$$

Y con la misma idea, dado $n > m$

$$d(x_n, x_m) = d(f^{(n)}(x), f^{(m)}(x))) = d(f^{(n-1)}(x), f^{(m-1)}(x))) = \dots = d(f^{(n-m)}(x), x) > \varepsilon$$

O sea, tenemos

$$d(x_n, x_m) > \varepsilon$$

para todo $n \neq m$. Entonces tenemos en X un conjunto infinito $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sin ningún punto de acumulación, lo cual se contradice con el hecho que X es compacto. Absurdo!
Entonces hemos probado que f es sobreyectiva con lo cual completamos el ejercicio.

Ejercicio 2. Sea X un espacio métrico conexo. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ y para todos $a, b \in X$, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$, tales que $x_1 = a, x_n = b$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$, para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Solución. Fijamos $\varepsilon > 0$ y $a \in X$. Definimos

$$Y = \{y \in X : \exists x_1, \ldots, x_n \in X, x_1 = a, x_n = y \text{ y } d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon \text{ para todo } 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Vamos a probar que $Y = X$, como X es conexo, nos basta ver que $Y \neq \emptyset$, Y es abierto y cerrado.

- Es claro que $Y \neq \emptyset$ pues $a \in Y$.
- Veamos que Y es abierto. Dado $y \in Y$, veamos que $B_\varepsilon(y) \subset Y$. Como $y \in Y$, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$, tales que $x_1 = a, x_n = y$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$, para todo $1 \leq i \leq n-1$. Luego si $x \in B_\varepsilon(y)$, tomando $x_{n+1} = x$, tenemos $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$. Entonces $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ satisfacen $x_1 = a, x_{n+1} = x$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq n$; por lo que $x \in Y$. De esta forma concluimos que $B_\varepsilon(y) \subset Y$.
- Veamos que Y es cerrado, probemos que su complemento es abierto. Dado $y \in Y^c$, resulta que $B_\varepsilon(y) \subset Y^c$. Pues si no fuera así existiría $x \in B_\varepsilon(y) \cap Y$, pero $x \in Y$ implica $B_\varepsilon(x) \subset Y$ como vimos recién y como $y \in B_\varepsilon(x)$ esto contradice el hecho que $y \in Y$.

Dado $b \in X$, como $Y = X$, en particular $b \in Y$ de donde se deduce el enunciado.

Ejercicio 3. Sea $T : (C[0,1], ||\cdot||_1) \to (\ell^\infty, ||\cdot||_\infty)$ el operador dado por

$$(T(f))_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

Probar que es lineal y continuo. Calcular su norma.

Solución. Es claro que T es lineal, veamos que es continuo. Dada $f \in C[0,1]$, tenemos

$$||T(f)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 x^n f(x)\, dx \right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 |x^n||f(x)|\, dx \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 |f(x)|\, dx = ||f||_1.$$

Por lo que T es continuo y $||T|| \leq 1$.
Veamos que $||T|| = 1$. Consideremos $f_k(x) = x^k$. Tenemos

$$||f_k||_1 = \int_0^1 |x^k|\, dx = \frac{1}{k+1}$$

y

$$||T(f_k)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^1 x^n x^k\, dx \right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 x^n x^k\, dx \geq \int_0^1 x x^k\, dx = \int_0^1 x^{k+1}\, dx = \frac{1}{k+2}$$

por lo que podemos concluir que

$$||T|| \geq \frac{||T(f_k)||_\infty}{||f_k||_1} = \frac{\frac{1}{k+2}}{\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Como $\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = 1$, concluimos que $||T|| \geq 1$. Esto completa la prueba de que $||T|| = 1$.

Ejercicio 4. Consideremos $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}.$$

a) Probar que f_n converge puntualmente en $[0, +\infty)$.

b) Probar que f_n no converge uniformemente en $[0, +\infty)$.

c) Probar que f_n converge uniformenmente en $[\varepsilon, +\infty)$ para todo $\varepsilon > 0$.

Solución. a) Si $x = 0$, tenemos $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con lo que claramente el límite es 0. Si $x \neq 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \frac{2x^2}{\frac{1}{n^2} + x^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{2x^2}{\frac{1}{n^2} + x^4} = 0\frac{2x^2}{x^4} = 0$$

b) Si convergiese uniformemente debería hacerlo a la función constatemente 0. Para ver que esto no es así, mostraremos un puntos en los que las f_n están uniformemente lejos de 0. Tenemos

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{1 + n^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4} = \frac{2}{1+1} = 1.$$

Hemos probado que la convergencia no es uniforme.

c) Veamos que f_n converge uniformemente a 0. Para eso daremos una cota para $|f_n(x)|$ independiente de x,

$$|f_n(x)| \leq \left|\frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}\right| \leq \frac{2nx^2}{n^2x^4} \leq \frac{2}{nx^2} \leq \frac{2}{n\varepsilon^2}.$$

La convergencia se sigue de que $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n\varepsilon^2} = 0$.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$f_n(x) = \frac{n}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\, dt.$$

Probar que

$$f_n' \to f'$$

uniformemente en cada intervalo $[a, b]$.

Solución. Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$f_n'(x) = \frac{n}{2}\left(f\left(x - \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{f\left(x - \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}}.$$

Por el teorema del valor medio,

$$f_n'(x) = \frac{f\left(x - \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = f'(\xi)$$

para algún $\xi \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$.

Dado $\varepsilon > 0$, queremos ver que existe n_0 tal que $|f_n'(x) - f'(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [a, b]$, para todo $n \geq n_0$. Como f es C^1, f' es continua. Si nos restringimos a el intervalo $[a - 1, b + 1]$, tenemos que f' es uniformemente continua. Tomemos $\delta > 0$ tal que $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$ si $|x - y| < \delta$. Y luego, tomamos n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < \delta$. Dado $x \in [a, b]$, tenemos $f_n'(x) = f'(\xi)$ para algún $\xi \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. Si $n \geq n_0$, $\xi \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subset (x - \frac{1}{n_0}, x + \frac{1}{n_0})$ luego $|x - \xi| < \frac{1}{n_0} < \delta$ y por lo tanto $|f'(\xi) - f'(x)| < \varepsilon$. Concluimos que dado $x \in [a, b]$ y $n \geq n_0$. resulta que $|f_n'(x) - f'(x)| = |f'(x) - f'(\xi)| < \varepsilon$, que es lo que queríamos.