

RESOLUCIÓN DEL PRIMER PARCIAL

Ejercicio 1. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:

a) $\{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) : f(n) \cup \{n\} = \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

b) $\{f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) : f(A) \cup A = \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}\}$

Solución. a) Sea

$$B = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) : f(n) \cup \{n\} = \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $f(n) \cup \{n\} = \mathbb{N}$, tenemos que $f(n) = \mathbb{N}$ o $f(n) = \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Por lo tanto para cada n tenemos dos posibilidades, por lo que B tiene 2^{\aleph_0} elementos. Para formalizar esta idea consideramos $\phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow B$ dada por

$$\phi((a_k)_{k \in \mathbb{N}})(n) = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } a_n = 1 \\ \mathbb{N} \setminus \{n\} & \text{si } a_n = 0. \end{cases}$$

La función $\psi : B \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\psi(f)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } f(n) = \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } f(n) = \mathbb{N} \setminus \{n\} \end{cases}$$

es la inversa de ϕ . Por lo tanto ϕ es biyectiva y entonces $\#B = \#\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\aleph_0}$.

b) Sea

$$C = \{f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) : f(A) \cup A = \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}\}.$$

Como $C \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$, tenemos $\#C \leq \#\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathcal{P}(\mathbb{N})} = c^c = 2^c$. Veamos que vale la igualdad.

Para cada A , tenemos varias posibilidades para que valga $f(A) \cup A = \mathbb{N}$. Entre ellas, podemos tomar $f(A) = \mathbb{N}$ o $f(A) = A^c$. Estas son distintas, salvo para $A = \emptyset$, en este caso tenemos $f(\emptyset) = \mathbb{N}$. Entonces para cada elemento de $\mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})$ tenemos dos posibilidades, por lo que el conjunto C tiene al menos $2^{\#\mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})} = 2^c$ elementos. Para formalizar esto último, consideramos $\phi : \{0, 1\}^{\mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})} \rightarrow C$ dada por

$$\phi((a_i)_{i \in \mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})})(A) = \begin{cases} \mathbb{N} & \text{si } A = \emptyset \\ \mathbb{N} & \text{si } a_A = 1 \\ A^c & \text{si } a_A = 0. \end{cases}$$

Veamos que es inyectiva. Si $(a_i)_{i \in \mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})} \neq (b_i)_{i \in \mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})}$, existe $i \in \mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})$ tal que $a_i \neq b_i$. Luego $\phi((a_i)_{i \in \mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})})(i) \neq \phi((b_i)_{i \in \mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})})(i)$. Por lo tanto ϕ es inyectiva y entonces $\#C \geq \#\{0, 1\}^{\mathcal{P}_{\neq \emptyset}(\mathbb{N})} = 2^c$.

Finalmente concluimos que $\#C = 2^c$.

Ejercicio 2. Decidir si los siguientes espacios son completos.

a) El espacio \mathbb{R}^2 dotado de la métrica dada por

$$d((x, y), (z, w)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq z \\ \text{mín}\{1, |y - w|\} & \text{si } x = z. \end{cases}$$

b) El espacio $\mathcal{C}[0, 1]$ dotado de la métrica dada por

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

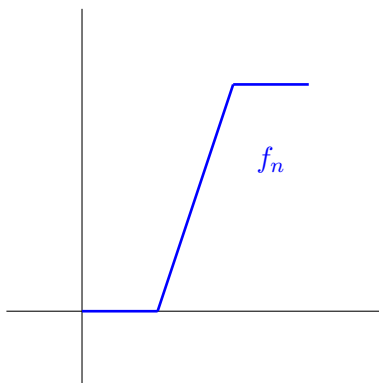
Solución. a) Veamos que el espacio es completo. Sea $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy, veamos que converge.

Sea N tal que $d((x_n, y_n), (x_m, y_m)) < 1$ para todo $n, m \geq N$. Como la distancia es menor a 1, en particular no es 1 por lo que los puntos deben coincidir en la primera coordenada. Esto es $x_n = x_N$ para todo $n \geq N$.

Dado $\varepsilon > 0$ tomamos n_0 tal que $d((x_n, y_n), (x_m, y_m)) < \text{mín}\{1, \varepsilon\}$ para todo $n, m \geq n_0$. Al igual que antes tenemos que los puntos coinciden en la primer coordenada y por lo tanto $d((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = \text{mín}\{1, |y_n - y_m|\}$. Además $\text{mín}\{1, |y_n - y_m|\} < \text{mín}\{1, \varepsilon\} < 1$, por lo que $\text{mín}\{1, |y_n - y_m|\} = |y_n - y_m|$. Concluimos que $|y_n - y_m| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$. Hemos probado que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy. Por lo que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \rightarrow y$. Es fácil ver que $(x_n, y_n) \rightarrow (x_N, y)$.

b) Veamos que el espacio no es completo. Consideremos $f_n \in \mathcal{C}[0, 1]$ dada por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2})n & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq x. \end{cases}$$



Tenemos

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x)| + |f_m(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(x) - 1| + |1 - f_m(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{4n} + \frac{1}{4m} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4m} \leq \frac{1}{n_0} \end{aligned}$$

para $m, n \geq n_0$. Por lo que la sucesión es de Cauchy.

Supongamos, por el absurdo, que $f_n \rightarrow f$ para alguna $f \in \mathcal{C}[0, 1]$.

Veamos que $f(x) = 0$ para todo $x \in (0, \frac{1}{2})$. Supongamos que no, entonces existe $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Luego, como $|f(x_0)| > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < x_0 - \delta < x_0 + \delta < \frac{1}{2}$ y $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 + \delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n_0}$ y por lo tanto $f_n(x) = 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ para todo $n \geq n_0$. Luego

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \geq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} |f_n(x) - f(x)| dx \geq 2\delta \frac{|f(x_0)|}{2}$$

lo que es absurdo pues $f_n \rightarrow f$. Entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in (0, \frac{1}{2})$.

De manera análoga podemos probar que $f(x) = 1$ para todo $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Pero esto es absurdo pues f es continua en $\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3.

a) Sean d y d' dos métricas definidas en X . Probar que son equivalentes:

- i) Para toda sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en X se tiene: $x_n \rightarrow x$ en $(X, d) \iff x_n \rightarrow x$ en (X, d') .
- ii) Para todo $U \subseteq X$: U es abierto en $(X, d) \iff U$ es abierto en (X, d') .

b) Consideramos en ℓ^∞ las siguientes métricas

$$d_\infty((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| \quad \text{y} \quad d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n - b_n|}{n}.$$

Sea $id : (\ell^\infty, d_\infty) \rightarrow (\ell^\infty, d)$. ¿Es continua? ¿Y su inversa?

Solución. a) Veamos que $i) \implies ii)$. Sea U abierto en (X, d) . Queremos ver que U es abierto en (X, d') . La otra implicación es análoga.

Supongamos que no. Si U no es abierto en (X, d') , existe $x \in U$ tal que para todo $r > 0$, tenemos $B_r^{d'}(x) \not\subseteq U$. Luego para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_{\frac{1}{n}}^{d'}(x) \cap U^c$. Entonces $x_n \rightarrow x$ en (X, d') . Pero por otra parte $x_n \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que $x_n \not\rightarrow x$ en (X, d) . Lo que contradice $i)$.

Veamos que $ii) \implies i)$. Sea $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $x_n \rightarrow x$ en (X, d) . Queremos ver que $x_n \rightarrow x$ en (X, d') . La otra implicación es análoga.

Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que $B_\varepsilon^{d'}(x)$ es abierto en (X, d') y por lo tanto en (X, d) . Luego existe δ tal que $B_\delta^d(x) \subset B_\varepsilon^{d'}(x)$. Como $x_n \rightarrow x$ en (X, d) , existe n_0 tal que $x_n \in B_\delta^d(x)$ para todo $n \geq n_0$. Y por lo tanto $x_n \in B_\varepsilon^{d'}(x)$ para todo $n \geq n_0$. Hemos probado que $x_n \rightarrow x$ en (X, d') .

b) Si $x_n \rightarrow x$ en (ℓ^∞, d_∞) luego $x_n \rightarrow x$ en (ℓ^∞, d) pues $d \leq d_\infty$. Por lo que id es continua.

Veamos que su inversa no lo es. Sea e^k la sucesión cuyo término k -ésimo es 1 y el resto son 0. Luego $e^k \rightarrow 0$ en (ℓ^∞, d) pues

$$d(e^k, 0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|e_n^k - 0|}{n} = \frac{1}{k}.$$

Pero

$$d_\infty(e^k, 0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |e_n^k - 0| = 1,$$

por lo que $e^k \not\rightarrow 0$ en (ℓ^∞, d_∞) . Entonces la inversa no es continua.

Ejercicio 4. Sea X un espacio métrico. Sea

$$C = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es convergente}\}.$$

Consideramos en C la distancia d_{∞} . Probar que X es separable si y solo si C es separable.

Solución. Veamos que si X es separable, entonces C lo es. Sea $D \subset X$ denso contable. Consideramos

$$\tilde{D} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}} : x_n = x_{n_0} \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ para algún } n_0 \in \mathbb{N}\}.$$

Definimos

$$D_k = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}} : x_n = x_k \text{ para todo } n \geq k\},$$

es fácil ver que este conjunto es contable y por lo tanto

$$\tilde{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$$

también lo es.

Nos resta probar que \tilde{D} es denso. Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$ y $\varepsilon > 0$, veamos que existe $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\tilde{D} \cap B_{\varepsilon}(x)$. Sea $y \in X$ tal que $x_n \rightarrow y$. Sabemos que existe n_0 tal que $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $n \geq n_0$. Tomemos $a_n \in D$ tal que $d(a_n, x_n) < \frac{\varepsilon}{4}$ para $n \leq n_0$. Y definimos $a_n = a_{n_0}$ para $n > n_0$, por lo que $a \in \tilde{D}$. Luego, para $n > n_0$, tenemos

$$d(a_n, x_n) = d(a_{n_0}, x_n) \leq d(a_{n_0}, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) + d(y, x_n) < 3\frac{\varepsilon}{4}$$

Entonces $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - x_n| < \varepsilon$ como queríamos.

Ahora veamos que si C es separable, entonces X lo es. Sea $\tilde{D} \subset C$ denso contable. Consideramos $D = \{d_1\}_{d \in \tilde{D}}$ el conjunto de las primeras coordenadas de las sucesiones en \tilde{D} . Es claro que es contable, veamos que es denso. Sea $x \in X$, consideremos la sucesión constante $(x)_{n \in \mathbb{N}} \in C$. Como \tilde{D} es denso, dado $\varepsilon > 0$, existe $a \in \tilde{D}$ tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - x| < \varepsilon,$$

luego $|a_1 - x| < \varepsilon$. Lo que prueba que D es denso en X .

Ejercicio 5. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de homeomorfismos de \mathbb{R} en \mathbb{R} y sea $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $F \cap \mathbb{Q}$ es finito. Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin f_n(F)$, $\forall n \geq 1$.

Solución. Si probamos que $f_n(F)$ es nunca denso para todo $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema de Baire

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(F) \right)^{\circ} = \emptyset.$$

En particular la unión no es todo el espacio, lo que prueba que hay un punto que no está en $f_n(F)$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.

Nos resta ver que $f_n(F)$ es nunca denso para todo $n \in \mathbb{N}$. Como F es cerrado y f_n es homeomorfismo, resulta que $f_n(F)$ es cerrado. Veamos que $f_n(F)^{\circ} = \emptyset$, supongamos que no. Si $x \in f_n(F)^{\circ}$, existe $\delta > 0$ tal que $B_{\delta}(x) \subset f_n(F)$. Luego, $f_n^{-1}(B_{\delta}(x)) \subset F$. Como $f_n^{-1}(B_{\delta}(x))$ es abierto, existen infinitos números en $f_n^{-1}(B_{\delta}(x)) \cap \mathbb{Q}$. Y por lo tanto existen infinitos números en $F \cap \mathbb{Q}$. Hemos llegado a un absurdo, por lo que $f_n(F)^{\circ} = \emptyset$ como queríamos.