PRIMER PARCIAL 14/5/2018

Nombre y Apellido: Número de libreta:

1	2	3	4	5	Calificación

Ejercicio 1. Calcular el cardinal de los siguientes conjuntos:

i) $\{f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \quad f(n) \cup \{n\} = \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

ii) $\{f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \quad f(A) \cup A = \mathbb{N} \quad \forall A \subset \mathbb{N}\}$

Ejercicio 2. Decidir si los siguientes espacios son completos.

i) El espacio $\mathbb{R}^2$ dotado de la métrica dada por

$$d((x,y),(z,w)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq z \\ \text{mín}\{1, |y-w|\} & \text{si } x = z. \end{cases}$$

ii) El espacio $\mathcal{C}[0,1]$ dotado de la métrica dada por

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Ejercicio 3.

a) Sean d y d' dos métricas definidas en X. Probar que son equivalentes:

i) Para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en X se tiene: $x_n \to x$ en $(X,d) \iff x_n \to x$ en (X,d').

ii) Para todo $U \subseteq X$: U es abierto en $(X,d) \iff U$ es abierto en (X,d').

b) Consideramos en ℓ^∞ las siguientes métricas

$$d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| \quad \text{y} \quad d((a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a_n - b_n|}{n}.$$

Sea $id : (\ell^\infty, d_\infty) \to (\ell^\infty, d)$. ¿Es continua? ¿Y su inversa?

Ejercicio 4. Sea X un espacio métrico. Sea

$$C = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es convergente}\}.$$

Consideramos en C la distacia d_∞. Probar que X es separable si y solo si C es separable.

Ejercicio 5. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de homeomorfismos de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $F \cap \mathbb{Q}$ es finito. Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin f_n(F)$, $\forall n \geq 1$.