

PRÁCTICA 9: CONVERGENCIA UNIFORME

*“A mathematician who is not also something of a poet
will never be a complete mathematician.”*
KARL WEIERSTRASS.

Ejercicio 1.

i) Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida sobre $A \subseteq \mathbb{R}$.

(a) $f_n(x) = x^n, \quad A = (-1, 1]$.

(b) $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}, \quad A = (1, +\infty)$.

(c) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n, \quad A = [0, 1]$.

ii) Para a) demostrar que la convergencia es uniforme en $A = (0, 1/2]$, idem en b) con $A = [2, 5]$. ¿Es uniforme la convergencia de c) en A o en algún sub-intervalo de A ?

Ejercicio 2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:

i) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$.

ii) $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}$.

iii) $f_n(z) = \frac{n}{n+1}z, \quad z \in \mathbb{C}$.

iv) $f_n(z) = nz^2, \quad z \in \mathbb{C}$.

v) $f_n(z) = z^n$, definidas en $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

Ejercicio 3. Sea X un conjunto y sea $B(X)$ el conjunto de las funciones $X \rightarrow \mathbb{C}$ que son acotadas. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en $B(X)$.

i) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge puntualmente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

ii) Probar que si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, entonces $f \in B(X)$.

iii) Probar que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a una función acotada $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ si y sólo si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge a f en $(B(X), d_\infty)$.

iv) Probar que si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en X , entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ es *uniformemente acotada*.

Ejercicio 4. Sea $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{(x^2+1)x}{1+(n+1)^2x^2}$, probar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $(g_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $E \subset X$, probar que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente en E . Si además (f_n) y (g_n) son uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)$ es uniformemente convergente. Mostrar con un ejemplo que esta última restricción es necesaria.

Ejercicio 6.

- i) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cada una de ellas derivable, que converge uniformemente a una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y f'_n converge uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y que $f' = g$.
- ii) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie de funciones. ¿Bajo qué hipótesis es legítimo derivarla término a término?
- iii) Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$$

converge uniformemente en \mathbb{R} , pero que esto no ocurre para la serie obtenida derivando término a término.

Ejercicio 7. Hallar (y justificar) los conjuntos en \mathbb{R} de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \quad ; \quad ii) \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \quad ; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad ; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

¿Qué ocurre con la serie que se obtiene derivando término a término?

Ejercicio 8. Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1 + \varepsilon, \infty)$ hacia una función continua, y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

Ejercicio 9. (Teorema de Dini) Sea K compacto y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ que converge puntualmente a $f \in C(K)$. Para cada $x \in K$ se tiene $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Probar que f_n converge uniformemente en K .

Ejercicio 10. Sea X un espacio métrico compacto, sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones continuas de X en \mathbb{R} y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ en X que converge a $x \in X$, la sucesión $(f_n(x_n))_{n \geq 1}$ converge en \mathbb{R} a $f(x)$.

Ejercicio 11. Sean f_n continuas en $[0, 1]$ tales que $f_n \rightrightarrows f$. Decidir si vale la siguiente afirmación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

Ejercicio 12. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una familia \mathcal{F} de funciones $X \rightarrow Y$ es *equicontinua* en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F}, d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Se dice que \mathcal{F} es *equicontinua* en X si es equicontinua en x para todo $x \in X$. Por último, decimos que la familia \mathcal{F} es *uniformemente equicontinua* en X si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F}, d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

- i) Toda familia finita de funciones de X en Y continuas en $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0 .
- ii) Sea $B(X, Y)$ el conjunto de las funciones acotadas de X en Y . Si $\mathcal{F} \subseteq B(X, Y)$ es una familia equicontinua, entonces $\overline{\mathcal{F}}$ también es equicontinua.

Supongamos desde ahora que X es compacto.

- iii) Si \mathcal{F} es una familia equicontinua de funciones de X en Y , entonces \mathcal{F} es uniformemente equicontinua.
- iv) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones continuas de X en Y que converge uniformemente en X , entonces $\{f_n : n \geq 1\}$ es una familia equicontinua.
- v) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones de X en Y uniformemente equicontinua que converge puntualmente a $f : X \rightarrow Y$, entonces esa convergencia es uniforme en X .

Ejercicio 13. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones de $[a, b]$ en \mathbb{R} integrables y uniformemente acotadas y para cada $n \geq 1$ sea $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(\xi) d\xi$$

para cada $x \in [a, b]$. Entonces la sucesión $(F_n)_{n \geq 1}$ posee una subsucesión que converge uniformemente sobre $[a, b]$.