

## PRÁCTICA 8: ESPACIOS NORMADOS

*“A mathematician is a person who can find analogies between theorems;  
a better mathematician is one who can see analogies between proofs  
and the best mathematician can notice analogies between theories.”*

STEFAN BANACH.

**Ejercicio 1.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado (sobre  $k = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ). Probar que se verifican:

- i) Las operaciones  $+: E \times E \rightarrow E$  y  $\times: k \times E \rightarrow E$  son continuas.
- ii)  $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$  (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
- iii)  $\text{diam}(B_r(x)) = 2r$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y sea  $C \subset E$ . Decimos que  $C$  es *convexo* si  $\forall x, y \in C$  y  $\forall t \in [0, 1]$  se tiene que  $tx + (1-t)y \in C$ .

- i) Probar que  $B_r(x)$  es convexo.
- ii) Probar que si  $(C_i)_{i \in I}$  son convexos, entonces  $\bigcap_{i \in I} C_i$  lo es.
- iii) Probar que si  $C$  es convexo, entonces  $C^\circ$  lo es.
- iv) Probar que si  $C$  es convexo, entonces  $\overline{C}$  lo es.

**Ejercicio 3.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \subset E$  un subespacio (vectorial). Probar que:

- i)  $\overline{S}$  también es un subespacio.
- ii) Si  $S \neq E$ , entonces  $S^\circ = \emptyset$ .
- iii) Si  $\dim(S) < \infty$ , entonces  $S$  es cerrado.
- iv) Si  $S$  es un hiperplano (o sea:  $\exists x \neq 0 \in E$  tal que  $S \oplus \langle x \rangle = E$ ), entonces  $S$  es o bien denso o bien cerrado en  $E$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $(x_n) \subset E$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge.

**Ejercicio 5.** Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperlanos.

- i)  $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset \ell_\infty$ .
- ii)  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$ .
- iii)  $\{x \in \ell_1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset \ell_1$ .

**Ejercicio 6.** Sean  $E$  y  $F$  espacios normados. Sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal. Probar que son equivalentes:

- (1)  $T$  es continuo en 0;
- (2)  $\exists x_0 \in E$  tal que  $T$  es continuo en  $x_0$ ;
- (3)  $T$  es continuo;
- (4)  $T$  es uniformemente continuo;
- (5)  $\exists M > 0 / \forall x \in E : \|Tx\| \leq M\|x\|$  ( $T$  es acotada);
- (6)  $\forall A \subset E$  acotado,  $T(A)$  es acotado.

**Ejercicio 7.** Sean  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  espacios normados. Consideramos  $L(E, F) = \{T : E \rightarrow F / T \text{ es lineal y continua}\}$ , y para cada  $T \in L(E, F)$  sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

- i)  $(L(E, F), \|\cdot\|)$  es un espacio normado.
- ii) Si  $F$  es de Banach entonces  $L(E, F)$  también lo es.

**Ejercicio 8.** Sean  $E$  y  $F$  espacios normados y sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M / \|Tx\| \leq M\|x\|\}.$$

**Ejercicio 9.** Sea  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sea  $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy.$$

Probar que  $K$  es lineal y continua. Acotar su norma.

**Ejercicio 10.** En  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \geq 1} / \exists n_0, a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$  ponemos la norma infinito. Probar que la función  $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f((a_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n,$$

es lineal pero no continua.

**Ejercicio 11.** Sean  $S, T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ , definidos por:

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

Probar que  $S, T \in L(\ell_1)$  y calcular sus normas.

**Ejercicio 12.**

i) Sea  $\phi \in C[0, 1]$  y sea  $T_\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que  $T_\phi$  es un funcional lineal continuo y que  $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$ .

ii) Sea  $T: c \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Probar que  $T$  es lineal y continuo y hallar  $\|T\|$ . Recordar que  $c$  es el conjunto de las sucesiones en  $\mathbb{R}$  convergentes.

iii) Sea  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$  el conjugado de  $p$  y sea  $b \in \ell_{p'}$ . Definimos  $T_b : \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$  según

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n.$$

Probar que  $T_b$  es lineal, continuo y hallar  $\|T_b\|$ .

**Ejercicio 13.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado de dimensión  $n$  y sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  un isomorfismo algebraico. Consideramos en  $\mathbb{R}^n$  la norma  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ .

i) Probar que  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$  es compacto en  $\mathbb{R}^n$ .

ii) Probar que existen  $c_1, c_2 > 0$  tales que para todo  $x \in \mathbb{R}^n : c_1 \|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2 \|x\|_\infty$ .

iii) Deducir que si  $N_1, N_2$  son dos normas en  $\mathbb{R}^n$ , entonces existen constantes  $a, b > 0$  tales que para todo  $x \in \mathbb{R}^n : aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_1(x)$  (esto es: son equivalentes).

**Ejercicio 14.** Sean  $E$  un espacio de Banach y  $S, T$  subespacios cerrados, con  $\dim T < \infty$ . Probar que  $S + T$  es cerrado.

**Ejercicio 15.** (Lema de Riesz) Sean  $E$  un espacio normado,  $S \subset E$  un subespacio vectorial cerrado propio, y  $0 < \alpha < 1$ .

Probar que existe  $x_\alpha \in E - S$  tal que  $\|x_\alpha\| = 1$  y  $\|s - x_\alpha\| > \alpha \forall s \in S$ .

*Sugerencia:* considerar  $x \notin S$ ,  $r = d(x, S)$  y  $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$  con  $b \in S$  adecuado.

**Ejercicio 16.** Sean  $E$  un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$  tal que  $\|\omega_n\| = 1$  y  $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2$ ,  $n \neq m$ . Deducir que  $\overline{B_1(0)}$  no es compacta.

*Sugerencia:* aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.

**Ejercicio 17.** Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $H \subset E$  un subespacio. Probar que  $H$  es un hiperplano si y sólo si existe  $\gamma : E \rightarrow \mathbb{R}(o \mathbb{C})$  lineal,  $\gamma \neq 0$  tal que  $H = Nu(\gamma)$ . Probar que  $H$  es cerrado si y sólo si  $\gamma$  es continua.

**Ejercicio 18.** Sea  $E$  un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.

*Sugerencia:* si la tuviera se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.