Práctica 6: Compacidad

Ejercicio 1.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.

ii) Mostrar que el intervalo $(0,1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.

iii) Sea $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 3. Sea $E = \{e^{(n)} \in \ell_\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que E es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 4. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X,d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 5. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que:

i) Si (X,d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

ii) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 6. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial de dimesión finita. Probar que toda norma en E es equivalente a $\|\cdot\|$. Deducir que $\bar{B}_r(x)$ es compacto cualquiera sean $x \in E$ y $r > 0$.
Sugerencia: Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de E. Probar que $\|\cdot\|_1 : \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in E \mapsto \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \in \mathbb{R}$ es una norma en E equivalente a $\|\cdot\|$.

Ejercicio 7. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}.$$

i) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x,1) = \{y \in c_0 \ / \ d(x,y) \leq 1\}$ no es compacta.

ii) Probar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 8. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Se considera el espacio $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X,d) e (Y,d') son compactos.

Ejercicio 9. Sea (X,d) un espacio métrico.

i) Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$; es decir, la distancia entre x y K *se realiza.*

ii) Sean $F, K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F,K)$ entre F y K es positiva. ¿Se realiza esta distancia? ¿Y si $X = \mathbb{R}^n$?

iii) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 *se realiza.*

Ejercicio 10. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{K} \subset \mathcal{X} \ / \ \mathcal{K} \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

i) Dados dos subconjuntos $A, B \subset X$, sea $\tilde{d}(A,B) = \sup\limits_{a \in A}\{d(a,B)\}$. Verificar que $\tilde{d}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

ii) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $\delta(A,B) = \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A,B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B,\varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A,\varepsilon),$$

donde $B(C,\varepsilon) = \{x \in X \ / \ d(x,C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$.

iii) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 11. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X,d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 12. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y,d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x,y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 13. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua.

Ejercicio 14.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a,b]$ y también en $[b,+\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 15. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $K \subset X$ compacto. Probar que si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in K$, entonces existe $c > 0$ tal que $f(x) \geq c$ para todo $x \in K$.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a,b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a,b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.