PRÁCTICA 10: DIFERENCIACIÓN Y TEOREMAS DE PUNTO FIJO

"Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas."
ALBERT EINSTEIN

"La inspiración es necesaria en geometría, tanto como en poesía."
ALEKSANDR PUSHKIN

Diferenciación

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que f' es acotada. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 2. Sean $x_0 \in (a,b)$ y $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua en (a,b) y derivable en $(a,b) \setminus \{x_0\}$. Supongamos además que los límites laterales de f' en x_0 existen y son finitos. Probar que

i) f es derivable lateralmente en x_0. Más aún, si ambos límites laterales coinciden, entonces f es derivable en x_0. Determinar $f'(x_0)$ en ese caso.

ii) Los resultados del ítem anterior dejan de ser válidos si se omite la hipótesis de continuidad de f en x_0.

Ejercicio 3. Sean $\alpha < a < b < \beta$ y $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función derivable en (α, β) tal que $f'(a) \neq f'(b)$. Probar que

i) Si $f'(a) < 0 < f'(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $f'(a) < \lambda < f'(b)$, entonces existe $d \in (a,b)$ tal que $f'(d) = \lambda$.

iii) Si $g : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ es la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} (t^2 \mathrm{sen} \frac{1}{t}, t^2 \cos \frac{1}{t}) & \text{si } 0 < t < 1, \\ (0,0) & \text{si } -1 < t \leq 0, \end{cases}$$

entonces g es derivable en $(-1,1)$ pero $g'((-1,1))$ no es conexo.

Ejercicio 4. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f : A \to \mathbb{R}^n$ una función. Probar que si f es diferenciable en x_0, entonces existen $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que $B(x_0, \delta) \subseteq A$ y

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\| \text{ para todo } x \in B(x_0, \delta).$$

Ejercicio 5. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ y sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene al segmento S que une x_1 y x_2. Mostrar que

i) Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces existe x en el segmento S tal que $f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2)$.

ii) El ítem anterior es falso para una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $m \neq 1$.

iii) Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable tal que $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$, entonces $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

Ejercicio 6. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Probar que si $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante en A.

Ejercicio 7. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y $f : A \to \mathbb{R}^m$ una función tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$$

para cada par de puntos x, $y \in A$. Probar que f es constante.

Ejercicio 8. Probar que una función $f : A \to \mathbb{R}$ definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$ y con derivadas parciales acotadas es continua.

Teoremas de la Función Inversa y de la Función Implícita

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen}\frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Probar que $f'(0) = 1$ y que f' es acotada en $(-1, 1)$, pero sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de 0. Esto muestra que la continuidad de f' en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa.

Ejercicio 10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Probar que

i) f no es inyectiva.

ii) El Jacobiano de f es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$, de manera que f es localmente inyectiva.

Ejercicio 11. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con Jacobiano no nulo en todo U. Probar que

i) f es abierta.

ii) Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es discreto en U.

Ejercicio 12. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es solución de la ecuación

$$F(xz, y - 2x) = 0.$$

i) Determinar condiciones suficientes para que existan un entorno $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de $(1, 0)$ y una función $\phi : W \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $\phi(1, 0) = 2$ y

$$F(xz, \phi(x, z) - 2x) = 0 \text{ para todo } (x, z) \in W.$$

ii) Mostrar que

$$x\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z) - z\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z) = 2x \text{ en } W.$$

Ejercicio 13. Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x - y^2 + z^3 = 0, \\ -\log(1+x) + y^2 z = 1, \end{cases}$$

define dos funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno del punto $(0, 1, 1)$.
Sea $C \subseteq \mathbb{R}^2$ la curva que define el sistema de ecuaciones considerado, dada en forma paramétrica por $\alpha(x) = (x, y(x), z(x))$, y consideremos la función $g(x, y, z) = 2xyz + z \tan x$. Calcular la derivada direccional de g en $(0, 1, 1)$ según el vector tangente a α en el punto $x = 0$.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, $n > 1$. Probar que si existe $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(p) = 0$ y $\nabla f(p) \neq 0$, entonces f se anula en infinitos puntos de $\mathbb{R}^n$. ¿Y si solo le pedimos que f sea continua y que exista $\nabla f(p)$ en lugar de C^1?

Teoremas de Punto Fijo

Ejercicio 15.

i) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene a lo sumo un punto fijo.

ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Probar que f tiene un único punto fijo.

iii) Mostrar que la función $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ satisface $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero que no tiene puntos fijos. Explicar por qué no contradice el teorema de punto fijo.

Ejercicio 16. Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$. Probar que la condición

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X, \qquad x \neq y,$$

no es suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo de f, pero que sí lo es si X es compacto.

Ejercicio 17. Sean $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que K satisface la condición de Lipschitz en la tercer variable, es decir,

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq M|z_1 - z_2|.$$

Consideremos la siguiente ecuación integral no lineal en el espacio $C([a, b], \mathbb{R})$ dada por

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, f(y))dy + \varphi(x).$$

Probar que la ecuación integral tiene solución única para todo

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

y mostrar una sucesión que converja a la solución.

Ejercicio 18. Sea X un espacio métrico completo y sea $T : X \to X$ tal que existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que T^n es una contracción. Probar que existe un único $x \in X$ tal que $T(x) = x$.

Ejercicio 19.

i) Probar que existe una única función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es solución de la siguiente ecuación integral
$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y) f(y) dy + \phi(x),$$
donde $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son continuas.

Sugerencia: Considere primero el caso K uniformemente acotado. Luego resuelva el problema restringido a un intervalo $[a - b, a + b]$ y utilice la unicidad. Alternativamente se puede utilizar el ejercicio 5 en conjunto con una desigualdad del tipo
$$\|T^n f - T^n g\| \leq \frac{M^n l^n}{n!} \|f - g\|$$

ii) Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ continua. Probar que las soluciones de
$$x'(t) = A(t)x(t)$$
están definidas para todo tiempo t.