

EJERCICIOS PARA PENSAR

---

**Ejercicio 1.** ¿Existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$  existe  $\delta_x, \varepsilon_x > 0$  para los cuales  $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_x$  si  $|y - x| < \delta_x$ ?

**Ejercicio 2.** ¿Existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función tal que solo es continua en los racionales?

**Ejercicio 3.** ¿Existe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función tal que solo es continua en los irracionales?

**Ejercicio 4.** Sea  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua en cada variable por separado (es decir,  $f(x_0, y)$  es continua como función de  $y$  para cada  $x_0 \in [0, 1]$  y viceversa). Demostrar que si  $f$  se anula en un conjunto denso entonces es constantemente nula.

**Ejercicio 5.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua que tiene la siguiente propiedad: para todo  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n\alpha) = 0$  ¿Es necesariamente cierto que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ?

**Ejercicio 6.** Sea  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz con al menos un autovalor real simple. Probar que existe  $\delta > 0$  tal que si  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisface  $|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$  entonces tiene al menos un autovalor real.