

Espacios Métricos

Abril de 2017

Copyright ©2018 Jorge Alberto Guccione y Juan José Guccione

Se permite la copia de esta obra en cualquier formato, siempre y cuando no se haga con fines de lucro, no se modifique el contenido del texto, se respete su autoría y esta nota se mantenga.

Primera Impresión,

Tipeado con \LaTeX .

ÍNDICE GENERAL

Índice general	I
Índice de figuras	III
1 Espacios métricos	1
1.1 Definición y ejemplos	2
1.1.1 Espacios pseudométricos	11
1.2 Espacios normados	15
1.3 Espacios con producto interno	19
1.4 Bolas abiertas, bolas cerradas y esferas.	23
1.4.1 Bolas en espacios normados.	26
1.5 Base de entornos de un punto	26
1.6 Distancia entre conjuntos y diámetro	28
1.7 Sucesiones	32
2 Topología de espacios métricos	37
2.1 Conjuntos abiertos	37
2.1.1 El interior de un conjunto.	39
2.1.2 Bases de un espacio métrico.	41
2.1.3 Subbases de un espacio métrico	42
2.2 Conjuntos cerrados.	43
2.2.1 El conjunto de Cantor	44
2.2.2 La clausura de un conjunto	46
2.3 La frontera y el borde de un conjunto	49
3 Funciones continuas	53
3.1 Funciones continuas	53
3.2 Funciones uniformemente continuas	59
3.3 Funciones de Lipschitz	62
3.4 Isometrías	65
3.5 Métricas Equivalentes	67
4 Espacios métricos separables	71
5 Espacios métricos completos	77
5.1 Sucesiones de Cauchy	77
5.2 Definición de espacio métrico completo	78

5.3	Completación	82
6	Compacidad	85
6.1	Primeras caracterizaciones y propiedades básicas	85
6.2	Funciones continuas sobre espacios compactos	91
6.3	La propiedad del número de Lebesgue.	93
6.4	El Teorema de Arzelá-Ascoli.	94
6.5	Dos aplicaciones importantes	95
6.5.1	El teorema fundamental del álgebra	95
6.5.2	El Teorema de Stone-Weirstrass	96
7	Espacios conexos y espacios arco-conexos	101
7.1	Espacios conexos	101
7.2	Espacios arco-conexos	105
7.3	Espacios localmente conexos	108
7.4	Espacios localmente arco-conexos	109

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Desigualdad triangular en el plano euclideo	2
1.2. Distancia d_∞ en \mathbb{R}^2	4
1.3. Distancia d_∞ entre dos funciones continuas $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$	4
1.4. Comparación entre las distancias d_1 y d_2 en el plano	6
1.5. Distancia d_1 entre dos funciones continuas $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$	6
1.6. Prueba de que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$	10
1.7. Significado geométrico de la subaditividad	13
1.8. Invariancia por traslaciones y homogeneidad de la distancia euclidea del plano	16
1.9. Bolas abiertas $B_1(0, 0)$ en \mathbb{R}^2 , respecto de d_∞ , d_1 y d_2	24
1.10. Bola abierta $B_r^{d_\infty}(f)$ en $C[1, 4]$	25
1.11. Ilustración geométrica de la Observación 1.34	25
1.12. Distancia de un punto a un conjunto convexo	32
2.1. Ilustración en el plano de la prueba de que las bolas abiertas son abiertos	38
2.2. Ilustración de la Proposición 2.20	41
2.3. Primeros pasos en la construcción del conjunto de Cantor	45
2.4. Ilustración de la Proposición 2.68	48
2.5. Prueba de la Proposición 2.73	50
3.1. Observación 3.29 con $\delta = 0,4$	60

ESPACIOS MÉTRICOS

Muchas de las nociones que se estudian en un primer curso riguroso de Análisis Matemático en una variable están basados en el concepto de límite de funciones, el cual en general se introduce mediante lo que popularmente se conoce como una “definición epsilon-delta”, y en el de límite de sucesiones, cuya introducción no necesita de “deltas” pero no prescinde de “epsilons”. Una vez presentados estos conceptos, para establecer las propiedades básicas uno tiene que probar que son verdaderas afirmaciones tales como, por ejemplo, que para cada par f y g de funciones reales de variable real que satisfacen hipótesis apropiadas, cada $x_0 \in \mathbb{R}$ y cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| < \epsilon,$$

y otras que tienen un aspecto similar. Como el módulo de la diferencia entre dos números es la distancia que los separa (definida como la longitud del segmento que los une), las afirmaciones que se hacen en este tipo de pruebas son afirmaciones acerca de distancias. Además, un examen detallado de estas demostraciones muestra que los argumentos se basan en las siguientes propiedades: la distancia entre dos puntos nunca es negativa y es cero si y solo si los dos son iguales, no depende del orden en que se toman los puntos, y no puede superar la suma de las distancias de estos puntos a un punto intermedio. Abstrayendo estas propiedades Maurice Fréchet introdujo los espacios métricos en su trabajo *Sur quelques points du calcul fonctionnel* en 1906, para explicar en términos abstractos importantes resultados obtenidos por matemáticos de su generación o ligeramente mayores, como Hadamard, y de una o dos generaciones anteriores, como Arzelá.

En la primera sección de este capítulo, luego de definir el concepto de espacio métrico y establecer unas pocas propiedades muy básicas, veremos varios ejemplos, entre los que se encuentra el más importante, a saber: el conjunto \mathbb{R} de los números reales provisto de la distancia usual. En la mayoría de estos ejemplos consideramos espacios métricos concretos, pero en cuatro examinamos dos métodos para construir nuevos espacios a partir de espacios métricos dados: la traslación de estructura a través de una función inyectiva, y la construcción de una métrica en un producto de dos espacios. En la segunda consideramos una ligera generalización de la noción de espacio métrico, los espacios pseudométricos, y vemos como construir un espacio métrico a partir de un espacio pseudométrico.

1.1. Definición y ejemplos

Por una parte, Fréchet definió un espacio métrico como un conjunto no vacío provisto de una función distancia que tiene tres propiedades, motivado por el hecho de que, como dijimos en la introducción del capítulo, muchas demostraciones en análisis matemático solo dependen de estas. Por otra parte, la misma terminología usada sugiere que el concepto abstracto de función “distancia” debe poderse motivar geoméricamente, y esto es cierto. Por ejemplo, consideremos el plano euclideo con la distancia $d(x, y)$, entre dos puntos x e y , definida como la longitud del segmento que los une. Como el segmento que une x consigo mismo es el segmento degenerado (de longitud cero) consistente del único punto x , es claro que $d(x, x) = 0$, y como el segmento que une x con y es el mismo que une y con x , también es claro que $d(x, y) = d(y, x)$. Además, para cada terna de puntos x, y y z del plano, la longitud del segmento que une x con z es menor o igual que la suma de las longitudes de los segmentos que unen x con y e y con z , siendo igual cuando y pertenece al segmento que une x con z (Vease la Figura 1.1).

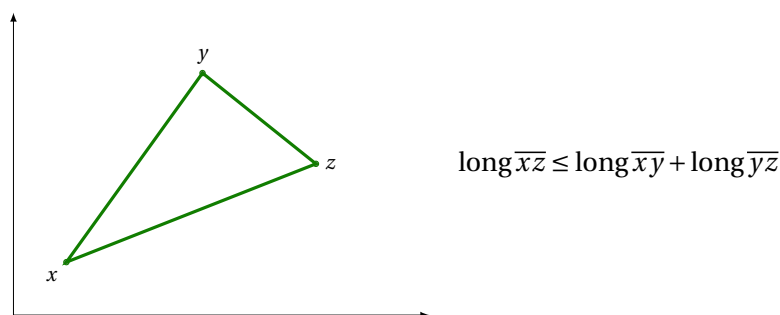


Figura 1.1: Desigualdad triangular en el plano euclideo

Definición 1.1. Un *espacio métrico* es un par (X, d) , formado por un conjunto no vacío X y una función

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

llamada *función distancia* o *métrica* de X , que satisface

1. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$, (simetría)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$. (desigualdad triangular)

Los elementos de X son llamados *puntos* de X .

Muchas veces, cuando no haya posibilidad de confusión hablaremos simplemente de un espacio métrico X , sin hacer referencia a la función distancia, la que genéricamente será denotada con d . Si es necesario distinguir entre varias funciones distancias utilizaremos la notación autoexplicativa d^X o notaciones específicas como $d_p, d_\infty, d_f, \bar{d}$, etcétera. Sin embargo, cuando lo consideremos conveniente usaremos la notación completa (X, d) . Unas palabra más acerca de la terminología usada en estas notas. A veces al probar que una función $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una métrica o una pseudométrica (ver la Sección 1.1.1) diremos que d tiene la propiedad triangular, para expresar que satisface la condición requerida en el ítem 3 de la definición anterior.

La proposición que sigue tiene tres items. En el primero se da una versión de la desigualdad triangular que es válida para un número arbitrario de puntos, en el segundo se establece que la distancia de dos puntos a un tercero no puede diferir más que la distancia entre ellos, y en el tercero se da una generalización de este hecho.

Proposición 1.2. *Para cada espacio métrico X , las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. Para toda sucesión finita x_1, \dots, x_n de puntos de X ,

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

2. $|d(x, u) - d(y, u)| \leq d(x, y)$, para todo $x, y, u \in X$.

3. $|d(x, u) - d(y, v)| \leq d(x, y) + d(u, v)$, para todo $x, y, u, v \in X$.

Demostración. 1. Procedemos por inducción en n . Es claro que esto es cierto para $n = 1$. Supongamos que lo es para n . Entonces por la desigualdad triangular y la hipótesis inductiva,

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}).$$

2. Basta observar que, debido a la desigualdad triangular y la simetría de la distancia,

$$d(x, u) - d(y, u) \leq d(x, y) \quad \text{y} \quad d(y, u) - d(x, u) \leq d(y, x) = d(x, y),$$

3. Esto vale porque

$$\begin{aligned} |d(x, u) - d(y, v)| &= |d(x, u) - d(y, u) + d(y, u) - d(y, v)| \\ &\leq |d(x, u) - d(y, u)| + |d(y, u) - d(y, v)| \\ &= |d(x, u) - d(y, u)| + |d(u, y) - d(v, y)| \\ &\leq d(x, y) + d(u, v), \end{aligned}$$

debido a que $|a + b| \leq |a| + |b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, a la simetría de la distancia y al item 2. □

Ejemplos 1.3. A continuación damos unos pocos ejemplos de espacios métricos. Luego de listarlos probaremos que en todos la función distancia satisface las condiciones pedidas en la Definición 1.1. Más adelante veremos más ejemplos.

1. Es claro que cada conjunto unitario tiene una única estructura de espacio métrico. En cambio un conjunto $\{x, y\}$ con dos puntos tiene infinitas, dado que podemos tomar

$$d(x, x) = d(y, y) = 0 \quad \text{y} \quad d(x, y) = d(y, x) = a,$$

donde a es un número real positivo arbitrario.

2. \mathbb{R} es un espacio métrico vía la función distancia $d(x, y) := |x - y|$. En otras palabras, la distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une. Este es el ejemplo paradigmático y más importante de espacio métrico y, salvo indicación en contrario, consideraremos a \mathbb{R} provisto de esta métrica. Más generalmente, \mathbb{R}^n es un espacio métrico vía la función distancia $d_\infty(x, y) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$, donde x_i es la i -ésima coordenada de x , e y_i , la de y . En la figura 1.2 se ilustra esta definición. La distancia d_∞ entre dos puntos x e y del plano es la máxima longitud de los lados del rectángulo con vértices opuestos x e y y lados paralelos a los ejes cartesianos; en este caso, la longitud de los lados verticales.

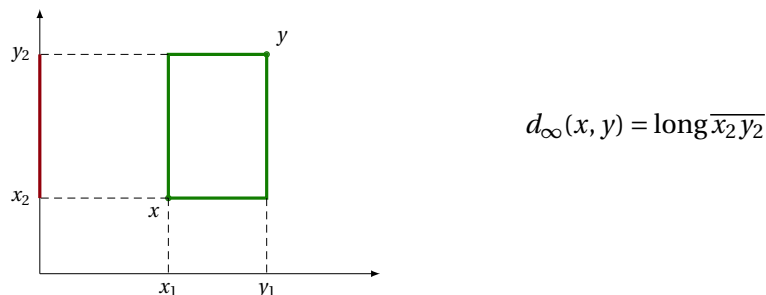


Figura 1.2: Distancia d_∞ en \mathbb{R}^2

3. El conjunto $B[a, b]$, de las funciones acotadas del intervalo cerrado $[a, b]$ en \mathbb{R} , es un espacio métrico via la función distancia $d_\infty: B[a, b] \times B[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$d_\infty(f, g) := \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|^1.$$

Siempre consideraremos a $B[a, b]$ provisto de esta métrica.

4. El conjunto $C[a, b]$, de las funciones continuas del intervalo cerrado $[a, b]$ en \mathbb{R} , es un espacio métrico via la función distancia $d_\infty: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$d_\infty(f, g) := \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|^2.$$

Salvo indicación en contrario, consideraremos a $C[a, b]$ provisto de esta métrica. En la Figura 1.3 se muestra el significado de esta distancia. En esta ilustración el segmento de longitud máxima del conjunto $\{f(t), g(t) : a \leq t \leq b\}$ es el segmento $f(t_0), g(t_0)$ en color rojo.

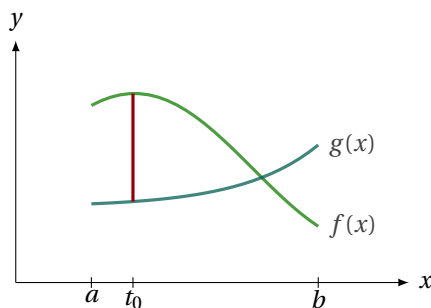


Figura 1.3: Distancia d_∞ entre dos funciones continuas $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

5. Para cualquier conjunto X , la función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una función distancia sobre X , llamada *métrica discreta* de X . Cada par (X, d) , formado por un conjunto no vacío X y una métrica discreta, es un *espacio métrico discreto*.

¹Que no es infinito porque, como f y g son acotadas, existen números reales $m \leq M$ tales que $m \leq f(t), g(t) \leq M$ para todo t , por lo que $\sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)| \leq M - m$.

²Recuerdese que toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ tiene un máximo global.

6. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces también lo es cada subconjunto Y de X via la *métrica inducida por d* , la cual es, por definición, la función distancia de Y obtenida restringiendo d a $Y \times Y$. Cada uno de estos espacios es llamado un *subespacio métrico de X* . Por ejemplo, $(C[a, b], d_\infty)$ es un subespacio métrico de $(B[a, b], d_\infty)$.
7. Si (X, d) es un espacio métrico y $f: Y \rightarrow X$ es una función inyectiva, entonces Y es un espacio métrico via la distancia d^f definida por

$$d^f(y, y') := d(f(y), f(y')).$$

El ejemplo anterior es el caso particular obtenido tomando la inclusión canónica de Y en X . Otro ejemplo se obtiene considerando el conjunto $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y la función $S: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $S(n) := n^{-1}$ (donde $\infty^{-1} := 0$). La distancia $d^S: \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ construída de esta manera está dada por

$$d^S(m, n) := \begin{cases} |m^{-1} - n^{-1}| & \text{si } m, n \in \mathbb{N}, \\ m^{-1} & \text{si } n = \infty. \end{cases}$$

Denotaremos con \mathbb{N}_S^* a este espacio métrico.

8. El producto $X \times Y$, de dos espacios métricos X e Y , es un espacio métrico via la distancia

$$d_\infty((x, y), (x', y')) := \max(d^X(x, x'), d^Y(y, y')),$$

donde d^X denota a la función distancia en X y d^Y , a la de Y . Por inducción se sigue inmediatamente que un producto $X_1 \times \cdots \times X_n$, de una cantidad finita de espacios métricos, es un espacio métrico via la distancia

$$d_\infty((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) := \max(d^{X_1}(x_1, x'_1), \dots, d^{X_n}(x_n, x'_n)).$$

Salvo indicación en contrario, siempre consideraremos a $X_1 \times \cdots \times X_n$ provisto de esta métrica.

9. Otra forma bastante usual de dar una estructura de espacio métrico al producto $X \times Y$ de dos espacios métricos X e Y , es hacerlo via la distancia d_2 , definida por

$$d_2((x, y), (x', y')) := \sqrt{d^X(x, x')^2 + d^Y(y, y')^2}.$$

Por inducción se sigue inmediatamente que un producto $X_1 \times \cdots \times X_n$, de una cantidad finita de espacios métricos, es un espacio métrico via la distancia

$$d_2((x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n)) := \sqrt{d^{X_1}(x_1, x'_1)^2 + \cdots + d^{X_n}(x_n, x'_n)^2}.$$

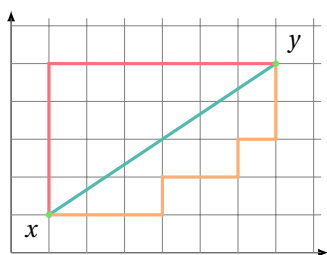
Esta aproximación tiene ventajas y desventajas respecto de la adoptada en el ítem anterior. Frecuentemente esta última permite hacer demostraciones más fáciles, pero muchas veces la presentada aquí produce métricas más naturales y, en muchos casos, más convenientes. Por ejemplo, tomando $X_1 = \cdots = X_n = \mathbb{R}$, y aplicando esta construcción, se obtiene la métrica usual de \mathbb{R}^n (ver el ítem 11). De todos modos, como veremos más adelante, para muchos propósitos estas métricas son equivalentes, y en esos casos la preferencia por una u otra podría deberse más a una cuestión de gusto que a otra cosa.

10. Para cada conjunto Y , el conjunto de los subconjuntos finitos de Y es un espacio métrico via $d(A, B) = \#(A \Delta B)$.

11. Para cada número real $p \geq 1$, la función $d_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$d_p(x, y) := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p},$$

es una distancia en \mathbb{R}^n . La distancia d_1 en el plano es llamada métrica del taxista porque si x e y representan puntos en calles de una ciudad con calles en damero (como a grandes rasgos es Buenos Aires), entonces $d_1(x, y)$ es la distancia que debe recorrer un taxi para ir de x a y , suponiendo que las calles tienen dos manos. El *espacio euclideo de dimensión n* es el espacio vectorial \mathbb{R}^n provisto de la distancia d_2 , la cual es llamada la *distancia euclidea* de \mathbb{R}^n . Debido a razones que explicaremos en otro capítulo, esta es la más importante de las infinitas métricas que pueden definirse sobre este espacio vectorial. Por ahora notemos que para $n = 1, 2$ y 3 da la distancia usual entre dos puntos (definida como la longitud del segmento que los une). En la Figura 1.4 comparamos las distancias d_1 y d_2 .



$d_1(x, y)$ = longitud de la línea roja
= longitud de la línea naranja

$d_2(x, y)$ = longitud de la línea azul

Figura 1.4: Comparación entre las distancias d_1 y d_2 en el plano

12. Para cada número real $p \geq 1$, la función $d_p: C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$d_p(f, g) := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt},$$

es una distancia en $C[a, b]$. En la Figura 1.5 ilustramos esta definición para $p = 1$, con las mismas funciones consideradas en la Figura 1.3. En este caso la distancia de f a g es el área de la región pintada de verde.

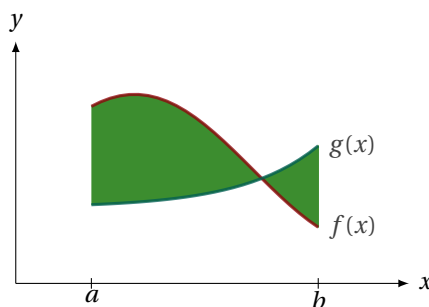


Figura 1.5: Distancia d_1 entre dos funciones continuas $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Vamos a probar ahora que las afirmaciones hechas en los items 1 a 12 son verdaderas. Con este fin veamos primero que en todos los casos se cumplen las dos primeras condiciones de la definición

de distancia. En los Ejemplos 1 y 5 estas se satisfacen por la misma definición de d . En el Ejemplo 2, porque, como el módulo de un número coincide con el módulo de su opuesto y la función módulo solo se anula en 0,

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| \quad \text{y} \quad \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

y cuentas similares prueban que también se satisfacen en los Ejemplos 3 y 4. Las igualdades

$$d_f(y, y') = d(f(y), f(y')) = d(f(y'), f(y)) = d_f(y', y),$$

y el hecho de que, como f es inyectiva,

$$d(f(y), f(y')) = 0 \Leftrightarrow f(y) = f(y') \Leftrightarrow y = y',$$

prueban que se satisfacen en el Ejemplo 7 (y entonces también en el 6). En el Ejemplo 8 se cumplen porque, como $d^X(x, x') = d^X(x', x)$ y $d^Y(y, y') = d^Y(y', y)$,

$$\max(d^X(x, x'), d^Y(y, y')) = \max(d^X(x', x), d^Y(y', y)),$$

y porque, como $d^X(x, x') = 0$ si y solo si $x = x'$ y $d^Y(y, y') = 0$ si y solo si $y = y'$,

$$\max(d^X(x, x'), d^Y(y, y')) = 0 \Leftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'.$$

En el Ejemplo 9, porque

$$\sqrt[2]{d^X(x, x')^2 + d^Y(y, y')^2} = \sqrt[2]{d^X(x', x)^2 + d^Y(y', y)^2},$$

y porque

$$\sqrt[2]{d^X(x, x')^2 + d^Y(y, y')^2} = 0 \Leftrightarrow d^X(x, x') = d^Y(y, y') = 0 \Leftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'.$$

En el Ejemplo 10, porque

$$A \Delta B = B \Delta A \quad \text{y} \quad A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B.$$

En el Ejemplo 11, porque

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^p},$$

debido a que el módulo de un número coincide con el módulo de su opuesto, y porque

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p = 0 \Leftrightarrow x_i = y_i \text{ para todos los índices } i,$$

debido a que la función $a \mapsto \sqrt[p]{a}$ es inyectiva y a que la función módulo solo se anula en 0; y en el Ejemplo 12, por argumentos similares.

Para concluir nuestra tarea todavía debemos ver que en todos los casos la función distancia tiene la propiedad triangular. Consideremos primero el Ejemplo 7. En este

$$d_f(y, y') = d(f(y), f(y')) \leq d(f(y), f(y'')) + d(f(y''), f(y')) = d_f(y, y'') + d_f(y'', y')$$

para todo $y, y', y'' \in Y$, como queremos, simplemente porque la propiedad triangular vale en X . El Ejemplo 6 no es necesario tratarlo, ya que es una instancia del 7. En los Ejemplos 1 y 5 (y, de hecho, en todos) es claro que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \text{si } x = y.$$

Simplemente, la expresión $d(x, x)$ a la izquierda del signo \leq vale cero, y la expresión $d(x, z) + d(z, x)$, a la derecha, es mayor o igual que cero. Supongamos que $x \neq y$. En el Ejemplo 1 esto implica que $x = z \neq y$ o $y = z \neq x$, por lo que

$$d(x, y) = a = d(x, z) + d(z, y);$$

y en el Ejemplo 5 implica que $x \neq z$ o $y \neq z$, por lo que

$$d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Examinemos ahora el segundo ejemplo. Reemplazando a por $x - y$ y b por $y - z$ en la desigualdad

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

válida para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se comprueba que la desigualdad triangular es cierta en \mathbb{R} . Pero entonces también lo es en (\mathbb{R}^n, d_∞) , porque dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z) \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\},$$

donde x_i, y_i y z_i son las i -ésimas coordenadas de x, y y z , respectivamente. Una cuenta similar prueba que la función distancia tiene la propiedad triangular en el tercer, cuarto y octavo ejemplos. Veamos que esto es cierto también en el noveno. Para abreviar notaciones escribamos $a := d^X(x, x')$, $\bar{a} := d^X(x', x'')$, $\tilde{a} := d^X(x, x'')$, $b := d^Y(y, y')$, $\bar{b} := d^Y(y', y'')$ y $\tilde{b} := d^Y(y, y'')$. Debemos verificar que

$$\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 \leq \left(\sqrt[2]{a^2 + b^2} + \sqrt[2]{\bar{a}^2 + \bar{b}^2} \right)^2. \quad (1.1)$$

Un cálculo directo muestra que

$$\left(\sqrt[2]{a^2 + b^2} + \sqrt[2]{\bar{a}^2 + \bar{b}^2} \right)^2 = a^2 + b^2 + \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\sqrt[2]{a^2 + b^2}\sqrt[2]{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}.$$

Además, dado que d^X y d^Y satisfacen la desigualdad triangular,

$$\tilde{a}^2 \leq (a + \bar{a})^2 = a^2 + \bar{a}^2 + 2a\bar{a} \quad \text{y} \quad \tilde{b}^2 \leq (b + \bar{b})^2 = b^2 + \bar{b}^2 + 2b\bar{b}.$$

Por lo tanto, para probar que vale la desigualdad (1.1), es suficiente ver que

$$a\bar{a} + b\bar{b} \leq \sqrt[2]{a^2 + b^2}\sqrt[2]{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}.$$

Pero esto es cierto, porque

$$(a\bar{a} + b\bar{b})^2 = a^2\bar{a}^2 + b^2\bar{b}^2 + 2a\bar{a}b\bar{b} \leq a^2\bar{a}^2 + b^2\bar{b}^2 + a^2\bar{b}^2 + b^2\bar{a}^2 = (a^2 + b^2)(\bar{a}^2 + \bar{b}^2),$$

debido a que

$$a^2\bar{b}^2 + b^2\bar{a}^2 - 2a\bar{a}b\bar{b} = (a\bar{b} - b\bar{a})^2 \geq 0.$$

La propiedad triangular se satisface en el décimo, porque

$$A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C),$$

para cada terna (A, B, C) de subconjuntos de Y . En efecto, si $x \in A \setminus C$ y $x \in B$, entonces $x \in B \Delta C$; y si $x \in A \setminus C$ y $x \notin B$, entonces $x \in A \Delta B$. Por lo tanto,

$$A \setminus C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C),$$

y, por simetría,

$$C \setminus A \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$$

Solo nos resta considerar los Ejemplos 11 y 12. La propiedad triangular en el primero de ellos se obtiene reemplazando a_i y b_i por $|x_i - y_i|$ e $|y_i - z_i|$, respectivamente, en la desigualdad de Minkowski

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |b_i|^p}, \quad (1.2)$$

la cual es válida para todo $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Cuando $p = 1$, esta desigualdad es una consecuencia inmediata de que

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R},$$

mientras que para $p > 1$, se sigue de la desigualdad de Hölder, que asegura que

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} \quad (1.3)$$

para todo $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ y $p, q > 1$ tales que $1/p + 1/q = 1$. En efecto, usando (1.3) dos veces y teniendo en cuenta que $(p-1)q = p$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p &= \sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)(|a_i| + |b_i|)^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |b_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1} \\ &\leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |b_i|^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p} \\ &= \left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |b_i|^p} \right) \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p}, \end{aligned}$$

lo que, debido a que

$$\sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p} \sqrt[q]{\sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p}$$

porque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, implica que vale la desigualdad

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (|a_i| + |b_i|)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |b_i|^p},$$

que a su vez tiene como consecuencia inmediata la de Minkowski, porque

$$|a_i + b_i|^p \leq (|a_i| + |b_i|)^p,$$

dado que $|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$ y la función $a \mapsto a^p$ es creciente.

Probemos ahora que vale la desigualdad de Hölder. Es claro que esta se satisface si todos los a_i 's o todos los b_i 's son cero, y que si se cumple para (a_1, \dots, a_n) y (b_1, \dots, b_n) , entonces también se cumple

para $(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ y $(\mu b_1, \dots, \mu b_n)$, cualesquiera sean λ y μ en \mathbb{R} . Por lo tanto, para ver que vale será suficiente mostrar que

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^p = \sum_{i=1}^n |b_i|^q = 1 \implies \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq 1. \quad (1.4)$$

Pero esto se sigue de que si $p, q > 1$ satisfacen $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{para todo } a, b \geq 0. \quad (1.5)$$

En efecto, usando esta desigualdad y la hipótesis de (1.4) obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |a_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |b_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

lo que, combinado con el hecho de que $1/p + 1/q = 1$, da (1.4). Resta comprobar que la desigualdad (1.5) es verdadera. Para ello consideramos el plano (ξ, η) . Como $p > 1$, la función $\eta = \xi^{p-1}$, definida para los números reales mayores o iguales que cero, es estrictamente creciente. Dado que, por hipótesis, $(p-1)(q-1) = 1$, su inversa es $\xi = \eta^{q-1}$. Es claro que ab es menor que la suma de las áreas A_1 , de la superficie delimitada por el eje ξ , la recta $\xi = a$ y el gráfico de $\eta = \xi^{p-1}$ y A_2 , de la superficie delimitada por el eje η , la recta $\eta = b$ y la gráfica de $\xi = \eta^{q-1}$.

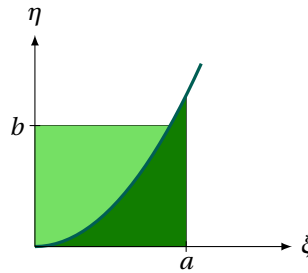


Figura 1.6: Prueba de que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Para terminar la demostración es suficiente observar que

$$A_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p} \quad \text{y} \quad A_2 = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Veamos ahora que en el último ejemplo también se satisface la desigualdad triangular. En efecto, esto se sigue de la desigualdad integral de Minkowski

$$\sqrt[p]{\int_a^b |\alpha(t) + \beta(t)|^p dt} \leq \sqrt[p]{\int_a^b |\alpha(t)|^p dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |\beta(t)|^p dt}, \quad (1.6)$$

reemplazando α por $f - g$ y β por $g - h$. Cuando $p = 1$ la desigualdad (1.6) vale porque

$$|\alpha(t) + \beta(t)| < |\alpha(t)| + |\beta(t)| \implies \int_a^b |\alpha(t) + \beta(t)| dt \leq \int_a^b |\alpha(t)| dt + \int_a^b |\beta(t)| dt,$$

mientras que cuando $p > 1$, es consecuencia fácil de la desigualdad integral de Hölder

$$\int_a^b |\alpha(t)\beta(t)| dt \leq \sqrt[p]{\int_a^b |\alpha(t)|^p dt} \sqrt[q]{\int_a^b |\beta(t)|^q dt}, \quad (1.7)$$

en la que $q = \frac{p}{p-1}$. En efecto, usando (1.7) dos veces obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b (|\alpha(t)| + |\beta(t)|)^p dt &= \int_a^b (|\alpha(t)| + |\beta(t)|)(|\alpha(t)| + |\beta(t)|)^{p-1} dt \\
&= \int_a^b |\alpha(t)|(|\alpha(t)| + |\beta(t)|)^{p-1} dt + \int_a^b |\beta(t)|(|\alpha(t)| + |\beta(t)|)^{p-1} dt \\
&\leq \sqrt[p]{\int_a^b |\alpha(t)|^p dt} \sqrt[q]{\int_a^b (|\alpha(t)| + |\beta(t)|)^p dt} \\
&+ \sqrt[p]{\int_a^b |\beta(t)|^p dt} \sqrt[q]{\int_a^b (|\alpha(t)| + |\beta(t)|)^p dt} \\
&= \left(\sqrt[p]{\int_a^b |\alpha(t)|^p dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |\beta(t)|^p dt} \right) \sqrt[q]{\int_a^b (|\alpha(t)| + |\beta(t)|)^p dt},
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\sqrt[p]{\int_a^b (|\alpha(t)| + |\beta(t)|)^p dt} \leq \sqrt[p]{\int_a^b |\alpha(t)|^p dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |\beta(t)|^p dt},$$

y, por lo tanto, que vale la desigualdad de Minkowski. Finalmente, la desigualdad integral de Hölder se sigue de (1.5) razonando como en la demostración de la desigualdad de Hölder (1.3). Para que la prueba de que en el Ejemplo 12 vale la propiedad triangular sea completa, damos los detalles. Es claro que (1.7) se satisface si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, y que si se cumple para α y β , entonces también se cumple para $\lambda \cdot \alpha$ y $\mu \cdot \beta$, cualesquiera sean λ y μ en \mathbb{R} . Debido a esto y a que la integral definida de cualquier función continua no nula $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es mayor que cero, para ver que la desigualdad integral de Hölder vale, será suficiente mostrar que

$$\int_a^b |\alpha(t)|^p dt = \int_a^b |\beta(t)|^q dt = 1 \implies \int_a^b |\alpha(t)\beta(t)| \leq 1. \quad (1.8)$$

Pero esto es cierto, porque, por (1.5),

$$\int_a^b |\alpha(t)\beta(t)| dt \leq \frac{1}{p} \int_a^b |\alpha(t)|^p dt + \frac{1}{q} \int_a^b |\beta(t)|^q dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1.1.1. Espacios pseudométricos

Definición 1.4. Decimos que un par (X, d) , formado por un conjunto X y una función

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

llamada *función pseudodistancia* o *pseudométrica* de X , es un *espacio pseudométrico* si d satisface:

1. $d(x, y) = 0$ si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$, (simetría)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$. (desigualdad triangular)

A diferencia de lo que ocurre con los espacios métricos, en un espacio pseudométrico dos puntos distintos pueden estar a distancia cero.

Ejemplo 1.5. Si en el ítem 7 de los Ejemplos 1.3 la función $f: Y \rightarrow X$ no es inyectiva, entonces la función $d^f: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la fórmula $d^f(y, y') := d(f(y), f(y'))$ es una pseudodistancia. Las pseudométricas $d^{X_i} \circ (p_i \times p_i)$ que consideramos en la Observación que sigue al Ejercicio 12 son de este tipo.

Ejemplo 1.6. Las fórmulas

$$d_p(f, g) := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt},$$

consideradas en el ítem 12 de los Ejemplos 1.3, definen pseudométricas sobre el espacio $\mathfrak{R}[a, b]$ de las funciones integrables Riemann de $[a, b]$ en \mathbb{R} . La razón es que la integral de una función positiva no nula integrable Riemann puede ser cero (considerese por ejemplo una función que se anula en todo el intervalo $[a, b]$, salvo en finitos puntos).

En el resto de estas notas, salvo cuando se indique otra cosa, las letras mayúsculas X, Y y Z designarán a espacios métricos.

Ejercicios

- (Eves, Hodward) Pruebe que si X es un conjunto no vacío y $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface
 - $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$,
 - $d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x)$ para todo $x, y, z \in X$,

entonces d es una métrica.

- Pruebe que si $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función distancia, entonces la función \bar{d} , definida por $\bar{d}(x, y) := \min(1, d(x, y))$, también lo es.
- Pruebe que

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |b_j| \sum_{i=1}^n |a_i| \quad \text{para todo } a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}.$$

Este resultado es la desigualdad de Hölder para $p = \infty$ (con $q = 1$). Enuncie y pruebe una versión integral.

- Pruebe que

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p}, \quad (1.9)$$

para cada par $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sucesiones de números reales, donde, por supuesto, el lado derecho es $+\infty$ si alguna de las series que aparecen en él no converge.

- Pruebe que tres números reales positivos a, b y c son las distancias de un espacio métrico de tres puntos³ si y solo si $a \leq b + c$, $b \leq a + c$ y $c \leq a + b$.
- Fijemos un conjunto no vacío X y número natural n . Dados $u, v \in X^n$, la *distancia de Hamming* $d(u, v)$, de u a v , es el número de índices i tales que $u_i \neq v_i$. Por ejemplo, si $X = \{0, 1\}$, $n = 5$, $u = (0, 1, 1, 1, 0)$ y $v = (1, 1, 0, 1, 0)$, entonces $d(u, v) = 2$. Pruebe que la distancia de Hamming define una métrica sobre X^n .

³i. e., que existe un espacio métrico de tres puntos $(\{x, y, z\}, d)$ con $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$ y $d(x, z) = c$.

7. Pruebe que dados tres puntos no alineados $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$, para cada $b, c \in \mathbb{R}^2$,

$$d_2(b, a_1) = d_2(c, a_1), \quad d_2(b, a_2) = d_2(c, a_2) \quad \text{y} \quad d_2(b, a_3) = d_2(c, a_3) \Rightarrow b = c.$$

Pruebe que dada una colección a_1, \dots, a_n de puntos de \mathbb{R}^2 , existe $b \in \mathbb{R}^2$ tal que el conjunto

$$\{c \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(c, a_i) = d_\infty(b, a_i) \text{ para todo } i\}$$

es infinito.

8. Pruebe que si (X, d) es un espacio pseudométrico, entonces la relación en X definida por $x \sim y$ si $d(x, y) = 0$, es de equivalencia. Denotemos con \bar{X} al conjunto cociente de X por \sim , y con $p: X \rightarrow \bar{X}$ a la proyección canónica. Pruebe que existe una única función

$$\bar{d}: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tal que $d = \bar{d} \circ (p \times p)$, y que esta función es una distancia.

Espacios métricos y funciones subaditivas

Una función $\alpha: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es *subaditiva* si

$$\alpha(u + v) \leq \alpha(u) + \alpha(v) \quad \text{para todo } u, v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n.$$

Para cada función $\alpha: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ y cada $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, el subgráfico⁴ de la función

$$u + v \mapsto \alpha(u) + \alpha(v), \quad \text{de } [u, \infty) \text{ en } \mathbb{R}_{\geq 0},$$

se obtiene aplicando al subgráfico de α la traslación que lleva el origen a $(u, \alpha(u))$; y el gráfico de la función $u + v \mapsto \alpha(u) + \alpha(v)$, también de $[u, \infty)$ en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, es la intersección del gráfico de α con $[u, \infty) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Por lo tanto α es subaditiva si y solo si para cada punto del gráfico de α , la traslación del subgráfico de α que lleva el origen a dicho punto incluye al conjunto de los puntos del gráfico de α que no están a su izquierda (ver la Figura 1.7).

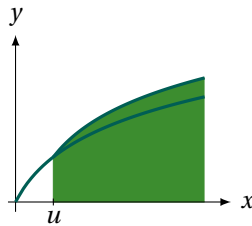


Figura 1.7: Significado geométrico de la subaditividad

9. Pruebe que las funciones subaditivas $\alpha: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, con $n > 1$, tienen una caracterización geométrica similar a la anterior.
10. Pruebe que si $\alpha: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función subaditiva creciente tal que $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$, entonces $\alpha \circ d$ es una función distancia para cada X y cada función distancia $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

⁴El subgráfico de una función real de variable real es el conjunto de los puntos del plano que están debajo de su gráfico.

Decimos que una familia finita (d^1, \dots, d^n) de pseudométricas definidas sobre un conjunto X *separa puntos* si para cada par de elementos $x \neq y$ de X existe i tal que $d^i(x, y) > 0$.

En el ejercicio que sigue consideramos a $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ provisto de la suma coordenada a coordenada y la relación de orden parcial definida por $u \leq v$ si $u_i \leq v_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. El resultado obtenido es una generalización directa de la Ejercicio 10.

11. Pruebe que si $\alpha: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función subaditiva creciente tal que $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$, entonces para cada familia finita $d^i: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($i = 1, \dots, n$) de pseudométricas definidas sobre un conjunto X , la función $\alpha \circ (d^1, \dots, d^n): X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$\alpha \circ (d^1, \dots, d^n)(x, y) := \alpha(d^1(x, y), \dots, d^n(x, y)),$$

es una pseudométrica, que es una métrica si y solo si (d^1, \dots, d^n) separa puntos.

12. Pruebe que las funciones $\alpha_p: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ($1 \leq p \leq \infty$), definidas por

$$\alpha_p(v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} \max(v_1, \dots, v_n) & \text{si } p = \infty, \\ \sqrt[p]{v_1^p + \dots + v_n^p} & \text{si } p < \infty, \end{cases}$$

satisfacen las condiciones pedidas a α en el ejercicio anterior.

Observación. Supongamos que d^1, \dots, d^n es una familia de pseudométricas definidas sobre un conjunto X , que tiene la propiedad de que para cada par de elementos $x \neq y$ de X existe i tal que $d^i(x, y) \neq 0$. Entonces por los Ejercicios 11 y 12, X es un espacio métrico vía cada una de las funciones distancia

$$\partial_p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

definidas por:

$$\partial_p(x, y) := \begin{cases} \max(d^1(x, y), \dots, d^n(x, y)) & \text{si } p = \infty, \\ \sqrt[p]{d^1(x, y)^p + \dots + d^n(x, y)^p} & \text{si } p < \infty. \end{cases}$$

Supongamos ahora que tenemos espacios métricos $(X_1, d^{X_1}), \dots, (X_n, d^{X_n})$. Entonces el producto $X := X_1 \times \dots \times X_n$ es un espacio métrico vía cada una de las funciones distancia

$$d_p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

definidas por:

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \max(d^{X_1}(x_1, y_1), \dots, d^{X_n}(x_n, y_n)) & \text{si } p = \infty, \\ \sqrt[p]{d^{X_1}(x_1, y_1)^p + \dots + d^{X_n}(x_n, y_n)^p} & \text{si } p < \infty, \end{cases}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$. En efecto, para comprobarlo basta aplicar la observación anterior con

$$X := X_1 \times \dots \times X_n \quad \text{y} \quad d^i := d^{X_i} \circ (p_i \times p_i),$$

donde $p_i: X \rightarrow X_i$ es la proyección canónica.

1.2. Espacios normados

En esta sección $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Fijado un k -espacio vectorial E , los elementos de k son llamados *escalares*, y los de E , *vectores*. Usaremos letras griegas para designar a los escalares y caracteres latinos para designar a los vectores. Las expresiones

$$\lambda + \mu, \quad \lambda\mu, \quad x + y \quad \text{y} \quad \lambda \cdot x$$

denotan a la suma y al producto de dos escalares λ y μ , a la suma de dos vectores x e y , y a la acción de un escalar λ sobre un vector x , respectivamente.

Definición 1.7. Una *norma* en un k -espacio vectorial E es una función $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

1. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$. ($\| \cdot \|$ es homogénea)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ($\| \cdot \|$ es subaditiva)

Un *espacio normado sobre k* , o *k -espacio normado* $(E, \| \cdot \|)$, es un k -espacio vectorial E , provisto de una norma $\| \cdot \|$.

A veces, cuando no haya posibilidad de confusión, hablaremos de un espacio normado E sin hacer referencia a la función norma, la cual será denotada con el símbolo $\| \cdot \|$, ni al cuerpo k . Si es necesario distinguir entre varias normas usaremos la notación autoexplicativa $\| \cdot \|_E$, o notaciones específicas como $\| \cdot \|_p$, $\| \cdot \|_\infty$, etcétera. Pero también algunas veces usaremos la notación completa $(E, \| \cdot \|)$.

Observación 1.8. Un \mathbb{C} -espacio normado es también un \mathbb{R} -espacio normado, con la misma norma.

Proposición 1.9. Si $\| \cdot \|$ es una norma en E , entonces la función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

es una métrica que satisface:

1. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$. (invariancia por traslaciones)
2. $d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = |\lambda| d(x, y)$. (homogeneidad)

Demostración. Por la condición 1 de la definición de norma,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

por la condición 2,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \| -1 \cdot (y - x) \| = | -1 | \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x),$$

y, por la condición 3,

$$d(x, z) = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Así que d es una métrica, la que, como lo prueban las igualdades

$$d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x, y)$$

y

$$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

es homogénea e invariante por traslaciones. □

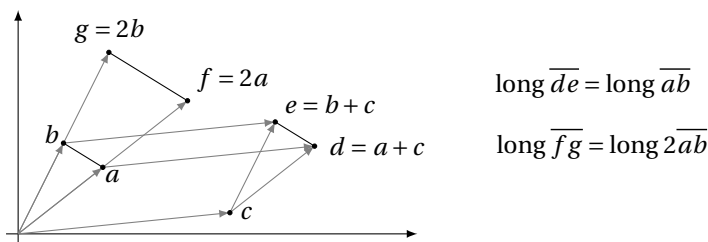


Figura 1.8: Invariancia por traslaciones y homogeneidad de la distancia euclídea del plano

Definición 1.10. Decimos que una distancia $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, definida sobre un k -espacio vectorial E , está asociada a una norma si existe una norma $\| \cdot \|$ en E tal que $d(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in E$.

La proposición anterior muestra que para que una distancia esté asociada a una norma debe ser homogénea e invariante por traslaciones. Dejamos como ejercicio para el lector probar que estas condiciones son suficientes, y que la norma es única.

Ejemplos 1.11. En el segundo de los ejemplos de espacios métricos dados en la primera sección del Capítulo 1 vimos que (\mathbb{R}^n, d_∞) es un espacio métrico. En realidad \mathbb{R}^n tiene una estructura canónica de \mathbb{R} -espacio vectorial y la distancia d_∞ proviene de una norma. Se trata de la norma $\| \cdot \|_\infty$ en \mathbb{R}^n , definida por

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

donde x_i es la i -ésima coordenada de x . También en el tercero, cuarto, onceavo y decimosegundo ejemplo de espacios métricos dados en la primera sección del Capítulo 1 las distancias provienen de normas. El tercer ejemplo fue $(B[a, b], d_\infty)$. Su conjunto subyacente $B[a, b]$ es un \mathbb{R} -espacio vectorial via la suma y el producto por escalares definidos por

$$(f + g)(t) := f(t) + g(t) \quad \text{y} \quad (\lambda \cdot f)(t) := \lambda f(t),$$

y su métrica d_∞ es la distancia asociada a la norma $\| \cdot \|_\infty$, definida por

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|. \tag{1.10}$$

El conjunto subyacente $C[a, b]$ del cuarto ejemplo es un subespacio vectorial de $B[a, b]$. Por lo tanto la fórmula (1.10) define por restricción una norma (también denotada $\| \cdot \|_\infty$) sobre $C[a, b]$, cuya función distancia d_∞ asociada, es la restricción a $C[a, b] \times C[a, b]$ de la distancia d_∞ de $B[a, b]$. Las normas a las que están asociadas las métricas d_p consideradas en los ejemplos onceavo y decimosegundo son la norma $\| \cdot \|_p$ de \mathbb{R}^n , definida por

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p},$$

y la norma $\| \cdot \|_p$ en $C[a, b]$, definida por

$$\|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt},$$

respectivamente. En ambos las estructuras de espacio vectorial son las consideradas antes.

Observación 1.12. Frecuentemente la norma $\| \cdot \|_\infty$ de $C[a, b]$ se define por la fórmula

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|.$$

Esto es correcto porque toda función real continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado alcanza su máximo.

Ejemplo 1.13. Para cada $p \in [1, \infty]$, el \mathbb{C} -espacio vectorial \mathbb{C}^n es un espacio normado via la norma $\| \cdot \|_p$ definida por

$$\|(z_1, \dots, z_n)\|_p := \begin{cases} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |z_i|^p} & \text{si } p < \infty, \\ \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

En efecto, es claro que estas funciones satisfacen la primera condición pedida en la Definición 1.7. También satisfacen la segunda, porque

$$\|\lambda \cdot (z_1, \dots, z_n)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |\lambda \cdot z_i|^p} = \sqrt[p]{|\lambda|^p \sum_{i=1}^n |z_i|^p} = |\lambda| \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |z_i|^p} = |\lambda| \|(z_1, \dots, z_n)\|_p$$

para cada $p < \infty$, mientras que

$$\|\lambda \cdot (z_1, \dots, z_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda \cdot z_i| = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| = |\lambda| \|(z_1, \dots, z_n)\|_\infty.$$

Por último, son subaditivas porque

$$\begin{aligned} \|(z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n)\|_p &= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |z_i + w_i|^p} \\ &\leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (|z_i| + |w_i|)^p} \\ &\leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |z_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |w_i|^p} && \text{por la desigualdad} \\ &= \|(z_1, \dots, z_n)\|_p + \|(w_1, \dots, w_n)\|_p && \text{de Minkowski (1.2)} \end{aligned}$$

para todo $p < \infty$, mientras que

$$\begin{aligned} \|(z_1, \dots, z_n) + (w_1, \dots, w_n)\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |z_i + w_i| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} (|z_i| + |w_i|) && \text{por la subaditividad} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |z_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |w_i| && \text{de la función } | \cdot | \\ &= \|(z_1, \dots, z_n)\|_\infty + \|(w_1, \dots, w_n)\|_\infty. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.14. Si $(E, \| \cdot \|)$ es un espacio normado, entonces también lo es cada subespacio vectorial F de E , con la *norma inducida por* $\| \cdot \|$, la que, por definición, es la norma de F obtenida restringiendo $\| \cdot \|$ a F . Cada uno de estos espacios es llamado un *subespacio normado de* E . Por ejemplo, $(C[a, b], \| \cdot \|_\infty)$ es un subespacio normado de $(B[a, b], \| \cdot \|_\infty)$.

Ejemplo 1.15. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y $f: F \rightarrow E$ es un monomorfismo de espacios vectoriales, entonces F es un espacio normado via la norma $\|\cdot\|^f$ definida por $\|y\|^f := \|f(y)\|$. En efecto, como f es inyectiva,

$$\|v\|^f = 0 \Leftrightarrow \|f(v)\| = 0 \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0;$$

como $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ para todo $\lambda \in k$ y $v \in F$ y la función $\|\cdot\|$ es homogénea,

$$\|\lambda \cdot v\|^f = \|f(\lambda \cdot v)\| = \|\lambda \cdot f(v)\| = |\lambda| \|f(v)\| = |\lambda| \|v\|^f;$$

y, como $f(v+w) = f(v) + f(w)$ para todo $v, w \in F$ y la función $\|\cdot\|$ es subaditiva,

$$\|v+w\|^f = \|f(v+w)\| = \|f(v) + f(w)\| \leq \|f(v)\| + \|f(w)\| = \|v\|^f + \|w\|^f.$$

El Ejemplo 1.14 es el caso particular obtenido tomando como f a la inclusión canónica de F en E .

Ejemplo 1.16. El producto cartesiano $E \times F$, de dos espacios normados E y F , es un espacio normado via la norma $\|\cdot\|_\infty$, definida por $\|(x, y)\|_\infty = \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$. Para verificar que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma es suficiente notar que, como $\|x\|_E = 0$ si y solo si $x = 0$ y $\|y\|_F = 0$ si y solo si $y = 0$,

$$\|(x, y)\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \|x\|_E = 0 \text{ y } \|y\|_F = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } y = 0;$$

como $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_F$ son homogéneas,

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot (x, y)\|_\infty &= \max(\|\lambda \cdot x\|_E, \|\lambda \cdot y\|_F) \\ &= \max(|\lambda| \|x\|_E, |\lambda| \|y\|_F) \\ &= |\lambda| \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \\ &= |\lambda| \|(x, y)\|_\infty; \end{aligned}$$

y, como $\|\cdot\|_E$ y $\|\cdot\|_F$ son subaditivas,

$$\begin{aligned} \|(x, y) + (x', y')\|_\infty &= \max(\|x+x'\|_E, \|y+y'\|_F) \\ &\leq \max(\|x\|_E + \|x'\|_E, \|y\|_F + \|y'\|_F) \\ &\leq \|(x, y)\|_\infty + \|(x', y')\|_\infty. \end{aligned}$$

Notemos que la métrica que induce esta norma sobre $E \times F$ es la definida en el ítem 8 del Ejemplo 1.3. Salvo indicación en contrario, siempre consideraremos al producto cartesiano de espacios normados dotado de esta norma.

Ejercicios

1. Pruebe que si $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una distancia invariante por traslaciones y homogénea, entonces d está asociada a una única norma.
2. Consideremos el espacio normado $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, donde $1 \leq p \leq \infty$, como un espacio normado sobre \mathbb{R} (ver la Observación 1.8). Pruebe que la norma inducida sobre \mathbb{R}^n a través de la inclusión canónica $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, de acuerdo al Ejemplo 1.15, es la norma $\|\cdot\|_p$.
3. Pruebe que la segunda igualdad en el enunciado de la Proposición 1.40 vale.

4. Pruebe que

$$B_r[0] = \bigcap_{\lambda \in (1, \infty)} \lambda \cdot B_r(0) \quad \text{y} \quad B_r(0) = \bigcup_{\lambda \in (0, 1)} \lambda \cdot B_r[0]$$

para todo $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

5. Pruebe que la segunda igualdad en el enunciado de la Proposición 1.41 vale.

Una *pseudonorma* en un k -espacio vectorial E es una función $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

- a) $\|x\| = 0$ si $x = 0$,
- b) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$, (homogeneidad)
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (subaditividad)

Un *espacio pseudonormado* es un k -espacio vectorial E , provisto de una pseudonorma.

6. Pruebe que si $\| \cdot \|$ es una pseudonorma en E , entonces la función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, es una pseudométrica que satisface:

- 5. $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, (invariancia por traslaciones)
- 6. $d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = |\lambda| d(x, y)$. (homogeneidad)

Pruebe que, recíprocamente, si d es una pseudométrica invariante por traslaciones y homogénea en E , entonces existe una única pseudonorma $\| \cdot \|$ en E tal que

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y.$$

En el siguiente ejercicio se supone que el lector conoce la construcción del espacio cociente de un espacio vectorial por un subespacio (Vease el Apéndice A).

7. Pruebe que si $(E, \| \cdot \|)$ es un espacio pseudonormado, entonces el conjunto

$$S := \{x \in E : \|x\| = 0\}$$

es un subespacio vectorial de E . Denotemos con E/S al espacio cociente y con $p : E \rightarrow E/S$ a la proyección canónica. Pruebe que existe una única función $\overline{\| \cdot \|} : E/S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que $\overline{\| \cdot \|} \circ p = \| \cdot \|$, y que $\overline{\| \cdot \|}$ es una norma.

8. Pruebe que en la situación del ejercicio anterior la función distancia \overline{d} , asociada a la norma $\overline{\| \cdot \|}$, coincide con la obtenida aplicando el Ejercicio 8 a la pseudométrica asociada a la pseudonorma $\| \cdot \|$.

1.3. Espacios con producto interno

En esta sección $k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} y, para cada número complejo λ , el símbolo $\overline{\lambda}$ denota el conjugado de λ .

Definición 1.17. Un *producto interno* sobre un k -espacio vectorial E es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow k$ que satisface

- 1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,
- 2. $\langle \lambda \cdot u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$,
- 3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,

4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ para cada $u \in E$ y $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$,

para todo $u, v, w \in E$ y $\lambda \in k$. Un k -espacio con producto interno, también llamado *espacio con producto interno sobre k* , o k -espacio prehilbertiano, es un par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, formado por un k -espacio vectorial E y un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre E .

Observación 1.18. Las dos primeras condiciones dicen que el producto interno es lineal en la primera variable, y la tercera dice que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es *simétrica hermitiana*. Combinando las tres, obtenemos que para todo $u, v, w \in E$ y $\lambda, \mu \in k$,

$$\langle u, \lambda \cdot v + \mu \cdot w \rangle = \overline{\langle \lambda \cdot v + \mu \cdot w, u \rangle} = \overline{\lambda \langle v, u \rangle + \mu \langle w, u \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\mu} \overline{\langle w, u \rangle} = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \overline{\mu} \langle u, w \rangle,$$

es decir, que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es *sesquilineal* (el prefijo sesqui significa 1 y 1/2). Por lo tanto, en el caso real las función $\langle u, v \rangle$ es una forma bilineal simétrica. En otras palabras, es lineal en cada variable y

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{para todo } u, v \in V.$$

Por último, la cuarta condición dice que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es *definida positiva*.

Cuando no haya posibilidad de confusión, hablaremos simplemente de un k -espacio con producto interno E sin hacer referencia al producto interno, el que genericamente será denotado $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si es necesario ser más específico usaremos la notación autoexplicativa $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. Asimismo, a veces no haremos referencia al cuerpo de base k , y diremos simplemente que E es un espacio con producto interno o un espacio prehilbertiano.

Ejemplos 1.19. El espacio vectorial \mathbb{R}^n es un \mathbb{R} -espacio con producto interno, llamado *espacio euclideo de dimensión n* via

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

El espacio vectorial \mathbb{C}^n también es un espacio con producto interno, en este caso sobre \mathbb{C} , llamado *espacio hermitiano de dimensión n* , via

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}.$$

Asimismo, los espacios de sucesiones $l_2(k)$ ($k = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) son k -espacios con producto interno via

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} u_i \overline{v_i},$$

En todos estos ejemplos u_i e v_i denotan a las i -ésimas coordenadas de u e v , respectivamente. Por último, el espacio $(C[a, b], \mathbb{R})$, de las funciones continuas de un intervalo cerrado $[a, b]$ en \mathbb{R} , es un \mathbb{R} -espacio con producto interno via

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

mientras que el espacio $(C[a, b], \mathbb{C})$, de las funciones continuas de un intervalo cerrado $[a, b]$ en \mathbb{C} , es un \mathbb{C} -espacio con producto interno via

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Ejemplo 1.20. Todo subespacio lineal V de un espacio con producto interno E es un espacio con producto interno via la restricción del producto interno de E a $V \times V$.

La siguiente es, junto con la de Hölder, una de las desigualdades más importantes del análisis. Una razón es que, como veremos pronto, permite probar que los espacios con producto interno tienen una estructura natural de espacio normado.

Teorema 1.21 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz). *Para todo $u, v \in E$,*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Además, en la desigualdad anterior vale la igualdad si y solo si u y v son linealmente independientes.

Demostración. Cuando $v = 0$, ambos lados se anulan. Supongamos que $v \neq 0$ y tomemos $\lambda := \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle u - \lambda \cdot v, u - \lambda \cdot v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, \lambda \cdot v \rangle - \langle \lambda \cdot v, u \rangle + \langle \lambda \cdot v, \lambda \cdot v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \bar{\lambda} \langle u, v \rangle - \lambda \langle v, u \rangle + |\lambda|^2 \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \bar{\lambda} \langle u, v \rangle - \lambda \overline{\langle u, v \rangle} + |\lambda|^2 \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle v, v \rangle}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}$, como queremos. La igualdad vale si y solo si $u - \lambda \cdot v = 0$, lo que ocurre si y solo si u y v son linealmente dependientes. \square

Teorema 1.22. *Cada espacio con producto interno E es un espacio normado via la norma $\| \cdot \|$ definida por $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$.*

Demostración. Debemos probar que la función $\| \cdot \|$ satisface las condiciones pedidas en la Definición 1.7. Por la Condición 4 de la Definición 1.17,

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \geq 0 \quad \text{para todo } u \in E,$$

y $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$. Por la Condición 2 y la Observación 1.18, para todo $\lambda \in k$ y $u \in E$,

$$\|\lambda \cdot u\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot u, \lambda \cdot u \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle u, u \rangle} = |\lambda| \|u\|,$$

de modo que la función $\| \cdot \|$ es homogénea. Por último, por la Condición 1 de la Definición 1.17, la Observación 1.18 y la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, para todo $u, v \in E$,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\Re(\langle u, v \rangle) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

lo que prueba que la función $\| \cdot \|$ es subaditiva. \square

Una propiedad importante de los paralelogramos es que la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados. El siguiente resultado generaliza este hecho.

Proposición 1.23 (Ley del paralelogramo). *Para cada par u, v de elementos de un espacio con producto interno E ,*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Demostración. Por la bilinealidad del producto interno y la definición de la norma de E ,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \end{aligned}$$

como afirmamos. □

Ejemplo 1.24. Tomemos $p \in [1, \infty]$. Cuando $p \neq 2$ no existe ningún producto interno sobre k^n que produzca la norma $\|\cdot\|_p$. Para comprobarlo basta notar que la norma $\|\cdot\|_p$ no satisface la identidad del paralelogramo. Para ello tomemos $u = (1, 1, 0, \dots, 0)$, $v = (1, -1, 0, \dots, 0)$ y notemos que

$$\|u\|^2 = \|v\|^2 = \begin{cases} 2^{2/p} & \text{si } p \neq \infty, \\ 1 & \text{si } p = \infty \end{cases} \quad \text{y} \quad \|u + v\|^2 = \|u - v\|^2 = 4.$$

Así que la identidad del paralelogramo no se cumple. El mismo argumento prueba que los espacios $l_p(k)$ son k -espacios con producto interno cuando $p \neq 2$.

Las fórmulas dadas en el siguiente resultado muestran que el producto interno de un espacio prehilbertiano está unívocamente determinado por la norma inducida.

Proposición 1.25 (Identidades de polarización). *Para cada par u, v de elementos de un espacio con producto interno E ,*

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) & \text{si } k = \mathbb{R}, \\ \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) + \frac{1}{4}i(\|u + i \cdot v\|^2 - \|u - i \cdot v\|^2) & \text{si } k = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Demostración. Por la bilinealidad del producto interno y el hecho de que $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle - \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle - \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= 2\langle u, v \rangle + 2\langle v, u \rangle \\ &= 4\Re(\langle u, v \rangle). \end{aligned}$$

Cuando $k = \mathbb{R}$, esto termina la demostración. Cuando $k = \mathbb{C}$, esta desigualdad, con v reemplazado por $i \cdot v$, muestra que

$$\|u + i \cdot v\|^2 - \|u - i \cdot v\|^2 = \Re(\langle u, i \cdot v \rangle) = \Re(-i\langle u, v \rangle) = \Im(\langle u, v \rangle).$$

La igualdad de polarización para $k = \mathbb{C}$ se sigue inmediatamente de estos hechos. □

Corolario 1.26. *Si una norma es inducida por un producto interno, entonces este es único y está dado por la identidad de polarización.*

Demostración. es una consecuencia inmediata de la proposición anterior. □

Ejercicios

1. Pruebe que las afirmaciones hechas en los Ejemplos 1.19 son verdaderas.
2. Supongamos que E es un \mathbb{C} -espacio vectorial y denotemos con ${}_{\mathbb{R}}E$ al espacio vectorial real subyacente a E . Pruebe que si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre E , entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{R}} := \Re \circ \langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre ${}_{\mathbb{R}}E$ que satisface

$$\langle i \cdot u, v \rangle^{\mathbb{R}} = -\langle u, i \cdot v \rangle^{\mathbb{R}} \quad \text{para todo } u, v \in {}_{\mathbb{R}}E. \quad (1.11)$$

Pruebe que vale la recíproca. Esto es, que si $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{R}}$ es un producto interno sobre ${}_{\mathbb{R}}E$ que satisface la condición (1.11), entonces la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$\langle u, v \rangle := \langle u, v \rangle^{\mathbb{R}} + i \langle u, i \cdot v \rangle^{\mathbb{R}},$$

es un producto interno sobre E , y es el único cuya parte real es $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{R}}$.

3. Pruebe la última afirmación del Teorema 1.21

1.4. Bolas abiertas, bolas cerradas y esferas

En esta sección presentamos los conceptos básicos de bola abierta, bola cerrada y esfera. Las tres nociones son importantes, pero la primera es fundamental para el desarrollo de la teoría, porque en ella se basa la definición de conjunto abierto (que daremos en un capítulo posterior). Luego de establecer estas definiciones describimos la forma de las bolas abiertas y cerradas en algunos espacios métricos concretos, lo que automáticamente da la forma de las esferas, y estudiamos en detalle como son las bolas abiertas y cerradas en productos finitos de espacios métricos. Por último describimos las bolas abiertas y cerradas en subespacios.

Definición 1.27. La *bola abierta* y la *bola cerrada* con *centro* en un punto x de un espacio métrico X y *radio* $r > 0$ son los conjuntos

$$B_r(x) := \{y \in X : d(y, x) < r\} \quad \text{y} \quad B_r[x] := \{y \in X : d(y, x) \leq r\},$$

respectivamente.

Definición 1.28. La *esfera* con *centro* x y *radio* r es el conjunto

$$S_r(x) := \{y \in X : d(y, x) = r\}.$$

Cuando sea necesario ser más precisos acerca de la métrica o del espacio que estamos considerando usaremos alguna de las notaciones autoexplicativas tales como $B_r^X(x)$, $B_r^d(x)$, $B_r^X[x]$, $B_r^d[x]$, $S_r^X(x)$ o $S_r^d(x)$.

Observación 1.29. De las mismas definiciones de bola abierta, bola cerrada y esfera se sigue inmediatamente que

$$B_r(x) \cup S_r(x) = B_r[x] \quad \text{y} \quad B_r(x) \cap S_r(x) = \emptyset.$$

La forma de las bolas abiertas, las bolas cerradas y las esferas de un espacio métrico depende tanto del conjunto subyacente como de la función distancia. Esto se ve claramente al considerar algunos de los siguientes ejemplos (no damos ninguno de esferas porque estos se obtienen inmediatamente calculando $B_r[x] \setminus B_r(x)$).

Ejemplo 1.30. Examinemos las bolas abiertas y cerradas en \mathbb{R}^2 cuando las funciones distancia son d_∞ , d_2 y d_1 , respectivamente.

- La bola abierta $B_r^{d_\infty}(x, y)$ es el cuadrado abierto $(x - r, x + r) \times (y - r, y + r)$ y la bola cerrada $B_r^{d_\infty}[x, y]$ es el cuadrado $[x - r, x + r] \times [y - r, y + r]$.
- La bola abierta $B_r^{d_2}(x, y)$ es el círculo abierto con centro (x, y) y radio r y la bola cerrada $B_r^{d_2}[x, y]$ es el círculo con centro (x, y) y radio r .
- La bola abierta $B_r^{d_1}(x, y)$ es el cuadrado abierto con vértices $(x - r, y)$, $(x + r, y)$, $(x, y - r)$ y $(x, y + r)$ y la bola cerrada y la bola cerrada $B_r^{d_1}[x, y]$ es el cuadrado con los mismos vértices.

En la Figura 1.9 se representan las bolas con centro $(0, 0)$ y radio r en (\mathbb{R}^2, d_∞) , (\mathbb{R}^2, d_1) y (\mathbb{R}^2, d_2) . Las bolas abiertas con centro en un punto arbitrario (x, y) del plano y radio r tienen la misma forma porque $B_r^{d_p}(x, y) = (x, y) + B_r^{d_p}(0, 0)$.

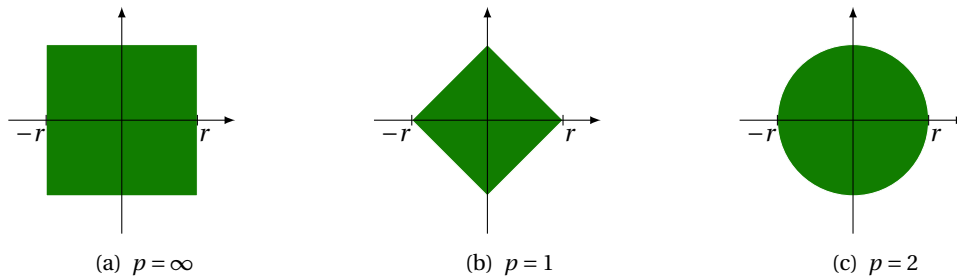


Figura 1.9: Bolas abiertas $B_1(0, 0)$ en \mathbb{R}^2 , respecto de d_∞ , d_1 y d_2

Ejemplo 1.31. En un espacio métrico discreto X

$$B_r(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad B_r[x] = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r < 1, \\ X & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

Ejemplo 1.32. En $C[a, b]$ la bola abierta $B_r^{d_\infty}(f)$ es el conjunto de las funciones $g \in C[a, b]$ tales que $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < r$ y la bola cerrada $B_r^{d_\infty}[f]$ es el conjunto de las funciones $g \in C[a, b]$ tales que $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq r$. Por otra parte, $B_r^{d_1}(f)$ es el conjunto de las funciones $g \in C[a, b]$ tales que el área de la superficie determinada por las rectas verticales que pasan por a y b , el eje de abscisas y el gráfico de $|f - g|$ es menor que r , mientras que $B_r^{d_1}[f]$ es el conjunto de las funciones $g \in C[a, b]$ tales que el área de la misma superficie es menor o igual que r . Más generalmente, para cada $p \in [1, \infty)$ la bola abierta $B_r^{d_p}(f)$ es el conjunto de las funciones $g \in C[a, b]$ tales que el área de la superficie determinada por las rectas verticales que pasan por a y b , el eje de abscisas y el gráfico de $|f - g|^p$ es menor que r^p , y la bola cerrada $B_r^{d_p}[f]$ es el conjunto de las funciones $g \in C[a, b]$ tales que el área de la misma superficie es menor o igual que r^p . No es posible representar geoméricamente estas bolas marcando todos sus puntos en un dibujo (como hicimos en la Figura 1.9) pero para la distancia d_∞ podemos darnos una idea geométrica de su “forma” dibujando el gráfico de una función f y pintando de verde la región del plano formada por los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $a \leq x \leq b$ y $|y - f(x)| < r$. Una función continua $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $B_r^{d_\infty}(f)$ si y solo si su gráfico está incluido en la zona pintada. En la Figura 1.10 hacemos esto, marcando con una línea continua azul el gráfico de f y con líneas punteadas los gráficos de dos funciones pertenecientes a $B_r^{d_\infty}(f)$.

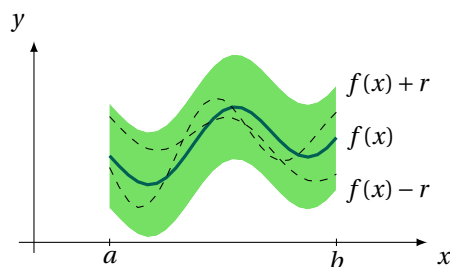


Figura 1.10: Bola abierta $B_r^{d_\infty}(f)$ en $C[1,4]$

Ejemplo 1.33. Por la misma definición de la distancia d_∞ , para cada punto (x, y) de un producto $X \times Y$ de espacios métricos y cada $r > 0$,

$$B_r^{X \times Y}(x, y) = B_r^X(x) \times B_r^Y(y) \quad \text{y} \quad B_r^{X \times Y}[x, y] = B_r^X[x] \times B_r^Y[y].$$

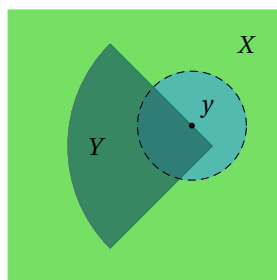
Por inducción resulta entonces que

$$B_r^X(x_1, \dots, x_n) = B_r^{X_1}(x_1) \times \dots \times B_r^{X_n}(x_n) \quad \text{y} \quad B_r^X[x_1, \dots, x_n] = B_r^{X_1}[x_1] \times \dots \times B_r^{X_n}[x_n]$$

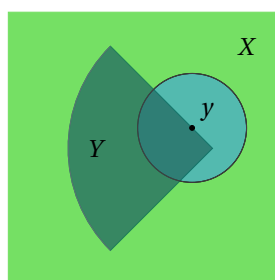
para cada producto finito $X := X_1 \times \dots \times X_n$ de espacios métricos, cada punto (x_1, \dots, x_n) de X y cada $r > 0$.

Observación 1.34. Para cada subespacio Y de un espacio métrico X y cada $y \in Y$,

$$B_r^Y(y) = B_r^X(y) \cap Y \quad \text{y} \quad B_r^Y[y] = B_r^X[y] \cap Y.$$



(a) Bola abierta en un subespacio



(b) Bola cerrada en un subespacio

Figura 1.11: Ilustración geométrica de la Observación 1.34

Proposición 1.35. Para cada par de puntos x e y de un espacio métrico, $B_r[x] \cap B_s(y) = \emptyset$ siempre que $r + s \leq d(x, y)$.

Demostración. Si existiera $z \in B_r[x] \cap B_s(y)$, entonces sería

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + s \leq d(x, y),$$

lo que es absurdo. □

Definición 1.36. Un subconjunto V de un espacio métrico X es un *entorno* de un punto $x \in X$ si incluye una bola abierta con centro en x .

Ejemplos 1.37. Las bola abierta $B_r(x)$ es un entorno de x para cada $r > 0$. También lo son la bola cerrada $B_r[x]$ y el propio espacio X .

Nota 1.38. La intersección de dos entornos de x es un entorno de x . En efecto, para comprobarlo basta observar que si $V_1 \supseteq B_{r_1}(x)$ y $V_2 \supseteq B_{r_2}(x)$, entonces $V_1 \cap V_2 \supseteq B_r(x)$, para cada $r \leq \min(r_1, r_2)$. Además, si V es un entorno de x y $W \supseteq V$, entonces W es un entorno de x , porque W incluye a toda bola con centro x incluida en V .

1.4.1. Bolas en espacios normados

Notaciones 1.39. Para cada par A y B de subconjuntos de un espacio normado E , cada escalar λ y cada subconjunto Λ de k , escribimos

$$A + B := \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}, \quad \lambda \cdot A := \{\lambda \cdot a : a \in A\} \quad \text{y} \quad \Lambda \cdot A := \{\lambda \cdot a : \lambda \in \Lambda \text{ y } a \in A\}.$$

Proposición 1.40. Para cada $\lambda \in k \setminus \{0\}$ y cada $r \in \mathbb{R}_{>0}$,

$$\lambda \cdot B_r(0) = B_{|\lambda|r}(0) \quad \text{y} \quad \lambda \cdot B_r[0] = B_{|\lambda|r}[0].$$

Demostración. La inclusión $\lambda \cdot B_r(0) \subseteq B_{|\lambda|r}(0)$ vale porque $\|\lambda \cdot y\| = |\lambda| \|y\| < |\lambda|r$ para todo $y \in B_r(0)$. En particular

$$\frac{1}{\lambda} \cdot B_{|\lambda|r}(0) \subseteq B_{\frac{1}{|\lambda|}|\lambda|r}(0) = B_r(0)$$

y, por lo tanto, también es cierto que $B_{|\lambda|r}(0) \subseteq \lambda \cdot B_r(0)$. La segunda igualdad puede probarse en forma similar. \square

La importancia en los espacios normados de las bolas centradas en 0 se debe a que determinan a todas las demás, como lo muestra el resultado que sigue.

Proposición 1.41. Para todo punto x de un espacio normado E y cada $r > 0$,

$$B_r(x) = x + B_r(0) \quad \text{y} \quad B_r[x] = x + B_r[0].$$

Demostración. La primera igualdad vale porque

$$y \in B_r(x) \Leftrightarrow d(y, x) < r \Leftrightarrow d(y - x, 0) < r \Leftrightarrow y - x \in B_r(0),$$

y la segunda puede probarse en forma similar. \square

1.5. Base de entornos de un punto

Definición 1.42. Una *base de entornos de x* es un conjunto \mathcal{B} de entornos de x , tal que para cada bola abierta $B_r(x)$ existe $V \in \mathcal{B}$ con $V \subseteq B_r(x)$.

Ejemplos 1.43. Los conjuntos

$$\{V : V \text{ es un entorno de } x\}, \quad \{B_r(x) : r \in \mathbb{R}\}, \quad \{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad \{B_{1/n}[x] : n \in \mathbb{N}\}$$

son bases de entornos de x . Las dos últimas son bases contables de entornos.

Definición 1.44. Fijemos un punto x de un espacio métrico X . Una *subbase de entornos de x* es cualquier conjunto \mathcal{S} de entornos de x , tal que el conjunto de las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} es una base de entornos de x .

Ejemplo 1.45. Para cada $x \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{(x - 1/n, +\infty) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(-\infty, x + 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$$

es una subbase de entornos de x .

Ejemplo 1.46. Para cada punto (x, y) de un producto $X \times Y$ de espacios métricos, el conjunto

$$\{B_r(x) \times Y : r > 0\} \cup \{X \times B_s(y) : s > 0\}$$

es una subbase de entornos de (x, y) . En efecto, esto se sigue inmediatamente de que, por el Ejemplo 1.33,

$$(B_r(x) \times Y) \cap (X \times B_s(y)) = B_r^X(x) \times B_s^Y(y) = B_r^{X \times Y}(x, y).$$

Más generalmente, para cada punto (x_1, \dots, x_n) de un producto finito $X_1 \times \dots \times X_n$ de espacios métricos, el conjunto

$$\{X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times B_r(x_i) \times X_{i+1} \times \dots \times X_n : 1 \leq i \leq n \text{ y } r > 0\}$$

es una subbase de entornos de (x_1, \dots, x_n) .

La importancia de la noción de subbase de entornos se debe a que, como vimos recién, algunos espacios métricos tienen subbases de entornos muy simples, y a que (como veremos por ejemplo al estudiar la continuidad de funciones en un punto) hay condiciones que en principio deberían verificarse sobre todos los entornos de un punto, pero que basta comprobarlas sobre una subbase de entornos, lo que permite obtener demostraciones simples de algunos resultados importantes. Nosotros no adoptaremos este punto de vista en estas notas, salvo en algunos ejercicios, cuyo objetivo será el de ilustrar la utilidad del método.

Ejercicios

1. Fijemos un punto $x := (x_1, \dots, x_n)$ en un producto finito $X := X_1 \times \dots \times X_n$ de espacios métricos. Pruebe que si \mathcal{B}_i es una base de entornos de x_i para todo i , entonces el conjunto

$$\{V_1 \times \dots \times V_n : V_i \in \mathcal{B}_i \text{ para todo } i\}$$

es una base de entornos de x .

2. Tomemos un espacio métrico X . Pruebe que para cada $x \in X$ el conjunto de los entornos de x es finito si y solo si X es finito. Pruebe que esto no necesariamente es cierto para las otras bases de entornos consideradas arriba.
3. Tomemos espacios métricos X_1, \dots, X_n y fijemos puntos $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Pruebe que si \mathcal{S}_i es una subbase de entornos de x_i para cada $1 \leq i \leq n$, entonces el conjunto

$$\{X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times S \times X_{i+1} \times \dots \times X_n : 1 \leq i \leq n \text{ y } S \in \mathcal{S}_i\}$$

es una subbase de entornos de (x_1, \dots, x_n) .

1.6. Distancia entre conjuntos y diámetro

En esta sección presentamos las nociones de distancia de un punto a un conjunto, de distancia entre conjuntos y de diámetro de un conjunto y estudiamos algunas de sus propiedades básicas.

Definición 1.47. La *distancia de un punto x de un espacio métrico X a un subconjunto A de X* es, por definición, el elemento

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y),$$

de $[0, \infty]$.

Definición 1.48. La *distancia $d(A, B)$* , entre dos subconjuntos A y B de X , está definida por:

$$d(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

Si bien un elemento de X no es un subconjunto de X , consideramos a la segunda definición más general que la primera porque $d(x, A) = d(\{x\}, A)$ para cada $x \in X$ y cada $A \subseteq X$. A pesar de su nombre, de su importancia, y de que $d(A, B) \geq 0$ y $d(A, B) = d(B, A)$, para todo $A, B \subseteq X$, esta “distancia” no define una pseudométrica en ningún subconjunto interesante del conjunto de partes de X . Más adelante veremos como definir una métrica sobre una colección importante de subconjuntos de X .

Observación 1.49. Por su misma definición, $d(A, B) = \infty$ si y solo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. En efecto, como el ínfimo de un subconjunto J de \mathbb{R} es infinito si y solo si J es vacío,

$$d(A, B) = \infty \text{ si y solo si } \{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\} = \emptyset,$$

lo que ocurre si y solo si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Observación 1.50. Para cada par A y B de subconjuntos de X ,

$$d(A, B) := \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{b \in B} d(A, b).$$

En efecto, si A o B son vacíos, entonces los tres términos valen ∞ . Supongamos que ambos son no vacíos. Como $d(A, B) \leq d(a, b)$ para cada $a \in A$ y $b \in B$,

$$d(A, B) \leq \inf_{a \in A} \left(\inf_{b \in B} d(a, b) \right) = \inf_{a \in A} d(a, B).$$

Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, existen $a_\epsilon \in A$ y $b_\epsilon \in B$ tales que $d(A, B) > d(a_\epsilon, b_\epsilon) - \epsilon$, por lo que

$$d(A, B) > d(a_\epsilon, b_\epsilon) - \epsilon \geq \inf_{a \in A} d(a, B) - \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario esto prueba que $d(A, B) \geq \inf_{a \in A} d(a, B)$. Por lo tanto $d(A, B) = \inf_{a \in A} d(a, B)$. Un cálculo similar muestra que $d(A, B) = \inf_{b \in B} d(A, b)$.

Ejemplo 1.51. En \mathbb{R} , provisto de la métrica usual,

$$d(0, [1, 2]) = d(0, (1, 2]) = 1 \quad \text{y} \quad d((0, 1], (1, 2)) = d(\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = d(0, (0, 1]) = 0.$$

El último ejemplo muestra que la distancia de un punto a un conjunto puede ser cero sin que el punto pertenezca al conjunto.

Ejemplo 1.52. En (\mathbb{R}^2, d_2) ,

$$d(\mathbb{R} \times \{0\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\}) = d(\mathbb{R} \times \{0\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 + 1\}) = 1$$

y

$$d(\{(x, 1/x) : x \in (0, \infty)\}, \{(x, -1/x) : x \in (0, \infty)\}) = 0.$$

Ejemplo 1.53. En un espacio métrico discreto X ,

$$d(A, B) = \begin{cases} 0 & \text{if } A \cap B \neq \emptyset, \\ 1 & \text{if } A \cap B = \emptyset, \end{cases}$$

para cada par de subconjuntos no vacíos A y B de X .

Definición 1.54. Decimos que *la distancia de un punto x de un espacio métrico X a un subconjunto A de X se realiza* si existe $a \in A$ tal que $d(x, a) = d(x, A)$. Si este es el caso, decimos también que la distancia de x a A se realiza en el punto a .

Definición 1.55. Decimos que *la distancia entre dos subconjuntos A y B de un espacio métrico X se realiza* si existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(a, b) = d(A, B)$. Si este es el caso, decimos también que la distancia de A a B se realiza en los puntos a y b .

Como el lector puede verificar sin dificultad, en algunos de los ejemplos que vimos recién la distancia se realiza, y en otros, no. Considerando una circunferencia en \mathbb{R}^2 y el centro de esta, se comprueba fácilmente que cuando la distancia de un punto $x \in X$ a un subconjunto A de X se realiza, el punto a puede no ser único. Por supuesto, lo mismo pasa con la distancia entre subconjuntos.

Proposición 1.56. $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y todo subconjunto no vacío A de X .

Demostración. Por la definición de $d(x, A)$ y la propiedad triangular de d , sabemos que

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{para todo } z \in A.$$

Así que $d(x, A) - d(x, y)$ es una cota inferior de $\{d(y, z) : z \in A\}$. Por lo tanto

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf\{d(y, z) : z \in A\} = d(y, A)$$

o, lo que es equivalente,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Por simetría, $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ y, en consecuencia, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, como queremos. \square

Notación 1.57. Para cada subconjunto A de un espacio métrico X y cada $\epsilon \in [0, \infty]$, denotamos con A_ϵ al conjunto de los puntos de X cuya distancia a A es menor o igual que ϵ . Dicho de otro modo,

$$A_\epsilon := \{x : d(x, A) \leq \epsilon\}.$$

Notese que $A_\infty = X$.

Proposición 1.58. Para cada $x \in X$, cada par de subconjuntos A y B de X y cada familia $(B_j)_{j \in J}$ de subconjuntos de X , las siguientes afirmaciones son verdaderas.

1. $d(x, \emptyset) = \infty$ y $d(x, A) < \infty$ si A es no vacío.
2. $d(x, \{x\}) = 0$.
3. Si $A \subseteq B$, entonces $d(x, A) \geq d(x, B)$.
4. Para todo $\epsilon \in [0, \infty]$, $d(x, A) \leq d(x, A_\epsilon) + \epsilon$.
5. $d(x, \bigcup_{j \in J} B_j) = \inf_{j \in J} d(x, B_j)$.
6. $d(x, \bigcap_{j \in J} B_j) \geq \sup_{j \in J} d(x, B_j)$.

Demostración. 1. Por la Observación 1.49).

2. Por definición,

$$d(x, \{x\}) = \inf\{d(x, x)\} = \inf\{0\} = 0.$$

3. Si $A \subseteq B$, entonces $\{d(x, a) : a \in A\} \subseteq \{d(x, b) : b \in B\}$ y, por lo tanto,

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\} \geq \inf\{d(x, b) : b \in B\} = d(x, B),$$

como afirmamos.

4. Para cada $a \in A_\epsilon$ y cada $\delta > 0$, existe $a' \in A$ tal que $d(a, a') \leq \epsilon + \delta$. Por lo tanto

$$d(x, A) \leq d(x, a') \leq d(x, a) + d(a, a') \leq d(x, a) + \epsilon + \delta.$$

Como a y δ son arbitrarios, el ítem es verdadero.

5. Por definición y por propiedades básicas del ínfimo,

$$d\left(x, \bigcup_{j \in J} B_j\right) = \inf_{b \in \bigcup_{j \in J} B_j} d(x, b) = \inf_{j \in J} \left(\inf_{b \in B_j} d(x, b) \right) = \inf_{j \in J} d(x, B_j),$$

como afirmamos.

6. Porque $d(x, A) \geq d(x, B)$ si $A \subseteq B$. □

Definición 1.59. Por definición, el *diámetro* de un subconjunto A de un espacio métrico X es

$$\text{diám } A := \sup_{a, b \in A} d(a, b).$$

Definición 1.60. Un subconjunto de X es *acotado* si su diámetro no es infinito.

Ejemplo 1.61. El conjunto vacío y las bolas son conjuntos acotados porque

$$\text{diám } \emptyset = \sup \emptyset = -\infty \quad \text{y} \quad \text{diám } B_r(x) \leq \text{diám } B_r[x] \leq 2r.$$

Ejemplo 1.62. Todo espacio métrico discreto X es acotado. En efecto

$$\text{diám } X = \begin{cases} 0 & \text{si } \#X = 0, \\ 1 & \text{si } \#X > 0. \end{cases}$$

Ejemplo 1.63. Un subconjunto no vacío A de \mathbb{R} es acotado si y solo si $\inf A$ y $\sup A$ son números reales. Esto es una consecuencia inmediata de la igualdad

$$\text{diám } A = \sup A - \inf A,$$

cuya prueba dejamos como ejercicio para el lector.

La desigualdad $\text{diám} B_r(x) \leq \text{diám} B_r[x] \leq 2r$ en el Ejemplo 1.61 puede ser estricta (considérese por ejemplo las bolas de radio $1/2$ en un espacio discreto). El resultado que sigue muestra que esto no ocurre en espacios normados.

Proposición 1.64. *En un espacio normado no nulo E ,*

$$\text{diám} B_r(x) = \text{diám} B_r[x] = 2r$$

para todo $x \in E$ y todo $r > 0$.

Demostración. Sabemos que $\text{diám} B_r(x) \leq \text{diám} B_r[x] \leq 2r$. Para probar que vale la desigualdad recíproca es suficiente notar que

$$x \pm \frac{\lambda}{\|y\|} \cdot y \in B_r(x) \quad \text{y} \quad d\left(x + \frac{\lambda}{\|y\|} \cdot y, x - \frac{\lambda}{\|y\|} \cdot y\right) = \frac{\lambda}{\|y\|} \|2 \cdot y\| = 2\lambda$$

para cada $y \in E \setminus \{0\}$ y cada $\lambda \in [0, r)$. □

El siguiente resultado es un reemplazo de la propiedad triangular para distancia entre conjuntos.

Proposición 1.65. *Para toda terna A, B, C de subconjuntos no vacíos de un espacio métrico,*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B) + \text{diám} C.$$

Demostración. Por la propiedad triangular de d y las definiciones de distancia entre conjuntos y de diámetro de un conjunto,

$$d(A, B) \leq d(a, b) \leq d(a, c) + d(c', b) + d(c, c') \leq d(a, c) + d(c', b) + \text{diám} C,$$

para cada $a \in A, b \in B$ y $c, c' \in C$. Tomando ínfimos en $d(a, c)$ y en $d(c', b)$, obtenemos la desigualdad deseada. □

Ejercicios

1. Pruebe que en cada espacio métrico X , para todo $a, b \in X$ y $r, s \in (0, \infty)$,

$$d(a, b) - r - s \leq d(B_r[a], B_s[b]) \leq d(B_r(a), B_s(b)) \leq d(a, b).$$

2. Pruebe que en el ejercicio anterior pueden darse todas las posibilidades. En otras palabras, que cualesquiera sean $r, s \in (0, \infty)$ y $0 \leq t \leq u \leq r + s$, existen un espacio métrico X y puntos $a, b \in X$ tales que

$$d(B_r[a], B_s[b]) = d(a, b) - u \quad \text{y} \quad d(B_r(a), B_s(b)) = d(a, b) - t.$$

INDICACIÓN: X puede tomarse como un subespacio de \mathbb{R} .

3. Recordemos que para cada conjunto Y , el conjunto $\mathcal{P}_f(Y)$, de los subconjuntos finitos de Y es un espacio métrico via $d(A, B) = \#(A \Delta B)$. Fijemos un subconjunto finito A de Y y un subconjunto B de $\mathcal{P}_f(Y)$. ¿Qué significa que $d(A, B) = 1$?
4. Recordemos que un subconjunto U de un espacio vectorial V es *convexo* si cualesquiera sean v y w en U , el segmento $\overline{vw} := \{tw + (1-t)v : 0 \leq t \leq 1\}$, con extremos v y w , está incluido en U . Supongamos que a y A son un punto de \mathbb{R}^2 y un subconjunto convexo no vacío de \mathbb{R}^2 , respectivamente. Pruebe que si la distancia euclídeana $d_2(a, A)$ se realiza, entonces el punto de A en el que lo hace es único (ver la Figura 1.12).

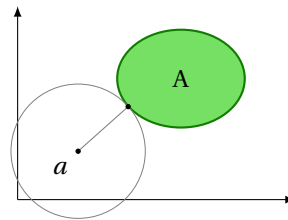


Figura 1.12: Distancia de un punto a un conjunto convexo

5. Supongamos que $(A_i)_{i \in I}$ y $(B_j)_{j \in J}$ son familias de subconjuntos de X y A, B, C y D son subconjuntos de X . Pruebe que las siguientes afirmaciones son verdaderas:
- $d(A, B) < \infty$ si y solo si A y B no son vacíos.
 - $d(A, B) = 0$ si $A \cap B \neq \emptyset$.
 - Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $d(B, D) \leq d(A, C)$.
 - Para todo ϵ, ϵ' con $0 \leq \epsilon, \epsilon' \leq \infty$, $d(A, B) \leq d(A_\epsilon, B_{\epsilon'}) + \epsilon + \epsilon'$.
 - $d(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{j \in J} B_j) = \inf_{i \in I, j \in J} d(A_i, B_j)$.
 - $d(\bigcap_{i \in I} A_i, \bigcap_{j \in J} B_j) \geq \sup_{i \in I, j \in J} d(A_i, B_j)$.
6. Pruebe que las siguientes afirmaciones son verdaderas para cada par de subconjuntos A y B de X :
- Si $A \subseteq B$, entonces $\text{diám } A \leq \text{diám } B$.
 - $\text{diám } A_\epsilon \leq 2\epsilon + \text{diám } A$ para todo $\epsilon \geq 0$.
 - $\text{diám}(A \cup B) \leq \text{diám } A + \text{diám } B + d(A, B)$.
7. Dé un ejemplo de un espacio métrico X en el que $\text{diám } B_r[x] < 2r$ para algún $x \in X$ y un $r > 0$.
8. Pruebe que todo subconjunto de un espacio métrico X , que es unión finita de subconjuntos acotados de X , es acotado. Dicho de otro modo, pruebe que si A_1, \dots, A_n son subconjuntos acotados de X , entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es un subconjunto acotado de X .

1.7. Sucesiones

Definición 1.66. Una *sucesión de puntos* de un conjunto X es una función $x: \mathbb{N} \rightarrow X$.

Siguiendo una práctica habitual escribiremos x_n en lugar de $x(n)$ y denotaremos a la sucesión x con el símbolo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definición 1.67. Una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una *subsucesión* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si existe una función estrictamente creciente $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{s_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.68. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de un espacio métrico X *converge a un punto* $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon \quad \text{para todo } n > n_0.$$

En este caso decimos también que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tiende a* x y que x es el *límite* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y escribimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \text{o} \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

Una sucesión de puntos de X es *convergente* si tiene un límite, y es *divergente* si no es convergente.

Observación 1.69. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tiende a x si y solo si la sucesión de números reales $(d(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a 0.

Observación 1.70. Si una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X converge, entonces lo hace a un solo punto. En efecto, si

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \quad \text{y} \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y,$$

entonces dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon \quad \text{y} \quad d(x_n, y) < \epsilon \quad \text{para todo } n > n_0,$$

y en consecuencia

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < 2\epsilon,$$

por la propiedad triangular de d . Como ϵ es arbitrario, esto implica que $d(x, y) = 0$, como queremos.

Ejemplo 1.71. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X es *finalmente constante* si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Toda sucesión finalmente constante es convergente. Si X tiene la métrica discreta estas son las únicas sucesiones convergentes.

Ejemplo 1.72. La sucesión de números reales $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a 0.

Ejemplo 1.73. La sucesión de números reales $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es divergente.

Ejemplo 1.74. Una sucesión de funciones acotadas $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiende a una función acotada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, respecto de la distancia d_∞ , si y solo si f_n tiende a f uniformemente.

Ejemplo 1.75. Una sucesión de funciones continuas $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tiende a una función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, respecto de la distancia d_1 , si y solo si el área de la región acotada determinada por los gráficos de f_n y f tiende a cero.

Observación 1.76. Para cada espacio métrico X , cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X y cada $x \in X$ son equivalentes:

1. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.
2. Para toda bola abierta $B_\epsilon(x)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\epsilon(x)$ si $n \geq n_0$.
3. Para todo entorno V de x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ si $n \geq n_0$.

En efecto, los items 1 y 2 son equivalentes porque $d(x_n, x) < \epsilon$ si y solo si $x_n \in B_\epsilon(x)$. El item 3 se sigue del item 2 porque todo entorno de x incluye una bola abierta $B_\epsilon(x)$, y el item 2 se sigue del item 3 porque toda bola abierta con centro en x es un entorno de x .

Observación 1.77. Para verificar que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de un espacio métrico X converge a un punto $x \in X$, es suficiente comprobar que la condición 3 de la Observación 1.76 se satisface para cada entorno V de una subbase de entornos \mathcal{S} de x . En efecto, supongamos que dados $V_1, \dots, V_i \in \mathcal{S}$, existen $n_1, \dots, n_i \in \mathbb{N}$ tales que $x_n \in V_j$ for all $n \geq n_j$. Entonces $x_n \in V_1 \cap \dots \cap V_i$ para todo $n \geq \max(n_1, \dots, n_i)$. Por la misma definición de subbase de entornos, esto implica que la condición 3) de la Observación 1.76 se satisface para todo entorno V de x .

Observación 1.78. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de un espacio normado E converge a un punto x si y solo si la sucesión $(x_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a 0.

Observación 1.79. Consideremos un espacio métrico X y un subespacio Y de X . Una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de Y tiende a $y \in Y$ si y solo si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a y en X e $y \in Y$.

Definición 1.80. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X es *acotada* si lo es el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Proposición 1.81. Una sucesión $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$ de puntos de un producto $X \times Y$ de espacios métricos converge a un punto (x, y) si y solo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a x e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a y .

Demostración. Como $d_\infty((x, y), (x_n, y_n)) = \max(d^X(x, x_n), d^Y(y, y_n))$, la sucesión

$$(d_\infty((x, y), (x_n, y_n)))_{n \in \mathbb{N}}$$

tiende a cero si y solo si las sucesiones $(d^X(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ y $(d^Y(y_n, y))_{n \in \mathbb{N}}$ lo hacen. \square

Corolario 1.82. Consideremos un producto $X := X_1 \times \dots \times X_m$ de una cantidad finita espacios métricos y un punto $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$. Una sucesión $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tiende a x si y solo si la sucesión $(x_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde x_j^n es la j -ésima coordenada de x^n , tiende a x_j para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.81 por inducción en n . \square

Corolario 1.83. Una sucesión $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de \mathbb{R}^m , donde $x^n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$, converge a un punto $x = (x_1, \dots, x_m)$ de \mathbb{R}^m respecto la norma $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si la sucesión de números reales $(x_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a x_i , para cada índice i .

Demostración. Esto es un caso particular del Corolario 1.82. \square

Nota 1.84. El resultado anterior vale para todas las normas $\|\cdot\|_p$, pero cuando $p \neq \infty$ no se sigue directamente de la Proposición 1.81. Es necesario probar además que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ tienen las mismas sucesiones convergentes, y que cada de ellas una tiene el mismo límite en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ y en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ (el lector puede probar esto ahora como un ejercicio o deducirlo más adelante del Ejercicio 8).

Proposición 1.85. Si una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto x , entonces también lo hace toda subsucesión $(x_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Demostración. Tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la definición de límite de una sucesión existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_\epsilon(x)$ para todo $n \geq n_0$. Como s es estrictamente creciente, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_m > n_0$ si $m \geq m_0$. Por lo tanto $x_{s_m} \in B_\epsilon(x)$ para todo $m \geq m_0$. \square

Corolario 1.86. Una sucesión de puntos de un espacio métrico que tiene una subsucesión divergente o dos subsucesiones que convergen a puntos distintos, es divergente.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior. \square

Definición 1.87. Un punto x de un espacio métrico X es un *punto de aglomeración de una sucesión* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X , si hay una subsucesión $(x_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que tiende a x .

Ejemplos 1.88. Por ejemplo, los puntos de aglomeración de la sucesión $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ son -1 y 1 , y la sucesión identidad $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene ninguno.

Observación 1.89. Por la Proposición 1.85 las sucesiones convergentes tienen un solo punto de aglomeración. La recíproca es falsa, por ejemplo la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por

$$x_n := \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

tiene un solo punto de aglomeración, pero no es convergente.

Observación 1.90. Un punto x de X es un punto de aglomeración de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si y solo si para toda bola $r > 0$ hay infinitos $m \in \mathbb{N}$ tales que $x_m \in B_r(x)$. En efecto, si $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{s_n}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{s_n} \in B_r(x) \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Como la función $n \mapsto s_n$ es inyectiva, esto prueba que el conjunto

$$\{m \in \mathbb{N} : x_m \in B_r(x)\}$$

es infinito. Recíprocamente, si para todo $r > 0$ el conjunto U_r de los $m \in \mathbb{N}$ tales que $x_m \in B_r(x)$ es infinito, entonces la sucesión $(x_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$, definida tomando como s_n al n -ésimo elemento de $U_{1/n}$, tiende a x , y es una subsucesión de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, porque la función $n \mapsto s_n$ es estrictamente creciente.

Observación 1.91. Recordemos que la recta real extendida \mathbb{R}^* consta del conjunto \mathbb{R} más dos elementos $-\infty$ y ∞ tales que $-\infty < a < \infty$ para cada número real a . En \mathbb{R}^* todo conjunto es acotado y tiene supremo e ínfimo. Consideremos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de \mathbb{R} . Definimos el *límite superior* y el *límite inferior* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como los elementos

$$\limsup_n x_n := \inf_n \sup_{i \geq n} x_i \quad \text{y} \quad \liminf_n x_n := \sup_n \inf_{i \geq n} x_i,$$

de \mathbb{R}^* , respectivamente. En los cursos de análisis matemático en una variable se prueba que

1. $\liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n$.
2. $\liminf_n x_n > -\infty$ si y solo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada inferiormente en \mathbb{R} y $\limsup_n x_n < \infty$ si y solo si es acotada superiormente en \mathbb{R} .
3. Si $\limsup_n x_n \in \mathbb{R}$, entonces $\limsup_n x_n$ es un punto de aglomeración de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Además, para cada $M > \limsup_n x_n$ hay solamente una cantidad finita de n 's tales que $x_n \geq M$. En consecuencia $\limsup_n x_n$ es el máximo punto de aglomeración de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Si $\liminf_n x_n \in \mathbb{R}$, entonces $\liminf_n x_n$ es un punto de aglomeración de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Además, para cada $M < \liminf_n x_n$ hay solamente una cantidad finita de n 's tales que $x_n \leq M$. En consecuencia $\liminf_n x_n$ es el mínimo punto de aglomeración de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Los siguientes hechos son equivalentes:
 - a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge,
 - b) $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n \in \mathbb{R}$,
 - c) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y tiene un solo punto de aglomeración.

Además, en este caso $\lim_n x_n = \liminf_n x_n = \limsup_n x_n$.

6. $\limsup_n x_n = -\infty$ si y solo si $\lim_n x_n = -\infty$ (esto es, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < M$ para todo $n \geq n_0$). Análogamente, $\liminf_n x_n = \infty$ si y solo si $\lim_n x_n = \infty$ (esto es, para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ para todo $n \geq n_0$).
7. $\limsup_n x_n = \infty$ si y solo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que tiende a ∞ . Análogamente $\liminf_n x_n = -\infty$ si y solo si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que tiende a $-\infty$.

Es muy tentador considerar como convergentes a las sucesiones con límite ∞ o $-\infty$, a pesar de que estos no son números reales, y considerar a ∞ como un punto de aglomeración de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\limsup_n x_n = \infty$, y a $-\infty$ como uno, si $\liminf_n x_n = -\infty$. Llegado a este punto es un paso pequeño admitir además que las sucesiones tomen valores en \mathbb{R}^* (es decir aceptar que x_n pueda ser $\pm\infty$ para algunos valores de n). Las ventajas son por lo menos dos: todas las sucesiones tienen puntos

de aglomeración (dicho de otra forma, toda sucesión tiene una subsucesión convergente) y una sucesión es convergente si y solo si tiene un único punto de aglomeración. Hay una pregunta natural. ¿Existe una métrica sobre \mathbb{R}^* bajo la cual la convergencia de sucesiones es la descrita arriba? (incluyendo la convergencia a $+\infty$ y a $-\infty$). Como veremos más adelante, la respuesta es que sí. También estudiaremos y caracterizaremos los espacios métricos que tienen la propiedad de que toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Observación 1.92. Por las condiciones 1), 2) y 3) de la observación anterior toda sucesión acotada superior o inferiormente tiene una subsucesión convergente. En efecto, por el ítem 2) la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada si y solo si $-\infty < \liminf_n x_n$ y $\limsup_n x_n < \infty$. Por el ítem 1) esto implica que $\liminf_n x_n \in \mathbb{R}$ y $\limsup_n x_n \in \mathbb{R}$.

Ejercicios

1. Pruebe que si una sucesión es convergente, entonces es acotada.
2. Pruebe que si $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ es una función sobreyectiva, entonces el conjunto de puntos de aglomeración de $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es \mathbb{R} .
3. ¿Cuándo converge una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de \mathbb{N}_S^* ? (ver el séptimo ítem de los Ejemplos 1.3).
4. Pruebe las afirmaciones hechas en la Observación 1.91.

TOPOLOGÍA DE ESPACIOS MÉTRICOS

2.1. Conjuntos abiertos

Definición 2.1. Un subconjunto U de un espacio métrico X es *abierto* si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq U$ o, equivalentemente, si es un entorno de cada uno de sus puntos.

Observación 2.2. Por la misma definición de abierto, si U es un abierto de X , entonces trivialmente cada $x \in U$ tiene un entorno incluido en U . Recíprocamente, si cada $x \in U$ tiene un entorno V_x incluido en U , entonces U es entorno de cada uno de sus puntos. Dicho de otro modo, U es abierto.

Observación 2.3. De la definición se sigue inmediatamente que todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas. Pronto veremos que también vale la recíproca.

Ejemplo 2.4. Los intervalos abiertos (acotados o no) son subconjuntos abiertos de \mathbb{R} . En efecto, supongamos, por ejemplo, que $x \in (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$. Entonces la bola $B_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$, donde $\epsilon = \min(x - a, b - x)$, está incluida en (a, b) .

Ejemplo 2.5. Todos los subconjuntos de un espacio métrico discreto X son abiertos.

Ejemplo 2.6. El conjunto $(y > x) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ es un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Para comprobarlo basta observar que si $y > x$ y $\epsilon = \frac{y-x}{2}$, entonces todo punto de la bola abierta $B_\epsilon^{\|\cdot\|_\infty}(x, y) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \times (y - \epsilon, y + \epsilon)$ pertenece a $(y > x)$. Más generalmente, para cada función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ los conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\}$ son subconjuntos abiertos de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Dejamos como ejercicio para el lector la tarea de probar esto.

Ejemplo 2.7. Por el Ejemplo 1.33, el producto $A_1 \times \cdots \times A_n$ de abiertos A_i de espacios métricos X_i es abierto en $X_1 \times \cdots \times X_n$. El ejemplo anterior muestra que no todos los subconjuntos abiertos de un producto finito de espacios métricos tienen esta forma.

Ejemplo 2.8. Los conjuntos abiertos de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ y de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ son los mismos. Esto es así porque $B_{r/\sqrt{2}}^{\|\cdot\|_\infty}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|_2}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|_\infty}(x)$ para cada $r > 0$. Más adelante veremos que, más generalmente, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$ tienen los mismos abiertos para todo $n \geq 1$ y cada $p, q \geq 1$.

Ejemplo 2.9. El conjunto $A := \{f \in B[a, b] : \sup_{x \in [a, b]} f(x) < 1\}$ es un subconjunto abierto de $B[a, b]$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. En efecto, si $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = r < 1$, entonces $B_{1-r}(f) \subseteq A$. En cambio el conjunto $B := \{f \in B[a, b] : f(x) < 1 \text{ para todo } x\}$ no es abierto porque si el supremo de los valores tomados por f es 1, entonces ninguna bola con centro en f está incluida en B .

Ejemplo 2.10. El conjunto $\{f \in C[a, b] : f(x) < 1 \text{ para todo } x\}$ es un subconjunto abierto de $C[a, b]$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. La razón es que si $f(x) < 1$ para todo x , entonces el supremo de los valores tomados por f es menor que 1 porque, por el Teorema de Bolzano, toda función real continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado alcanza su máximo.

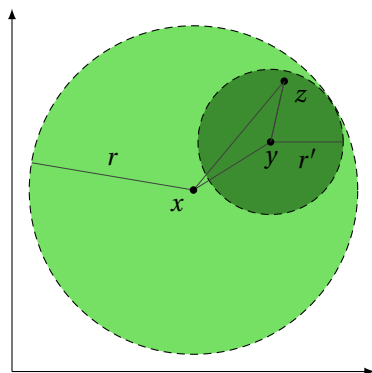
Observación 2.11. En todo espacio métrico X , las bolas abiertas $B_r(x)$ son conjuntos abiertos. En efecto, para cada $y \in B_r(x)$ la bola $B_{r-d(x,y)}(y)$ está incluida en $B_r(x)$, porque

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r - d(x, y) = r \quad \text{para todo } z \in B_{r-d(x,y)}(y).$$

También en todo espacio métrico X el complemento de cada bola cerrada $B_r[x]$ es un conjunto abierto. En efecto, por la Proposición 1.35

$$B_s(y) \subseteq X \setminus B_r[x]$$

para cada $y \in X \setminus B_r[x]$, y todo $0 < s < d(x, y) - r$.



$$r' = r - \text{long } \overline{xy}$$

$$\begin{aligned} \text{long } \overline{xz} &\leq \text{long } \overline{xy} + \text{long } \overline{yz} \\ &< \text{long } \overline{xz} + r' \\ &= r \end{aligned}$$

Figura 2.1: Ilustración en el plano de la prueba de que las bolas abiertas son abiertos

Teorema 2.12. Las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo espacio métrico X :

1. X y \emptyset son abiertos.
2. Si $(U_j)_{j \in J}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X , entonces $\bigcup_{j \in J} U_j$ es abierto.
3. Si U y V son subconjuntos abiertos de X , entonces $U \cap V$ es abierto.

Demostración. Es claro que X y \emptyset son abiertos. Fijado $x \in \bigcup_{j \in J} U_j$, existe $i \in J$ tal que $x \in U_i$. Entonces, como U_i es abierto,

$$B_r(x) \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$$

para algún $r > 0$. Esto prueba que $\bigcup_{j \in J} U_j$ es abierto. Por último, dado $x \in U \cap V$, existen números reales positivos r y r' , tales que $B_r(x) \subseteq U$ y $B_{r'}(x) \subseteq V$. Denotemos con r'' al mínimo de r y r' . Es evidente que $B_{r''}(x) \subseteq U \cap V$. □

Como observamos arriba, todo abierto de un espacio métrico X es unión de bolas abiertas. Recíprocamente, por la Observación 2.11 y el Teorema 2.12, todo subconjunto de X que es unión de bolas abiertas es abierto. Para los abiertos de la recta hay una descripción más precisa.

Teorema 2.13. *Un subconjunto U de \mathbb{R} es abierto si y solo si es unión disjunta de intervalos abiertos.*

Demostración. \Leftarrow): Esto es una consecuencia inmediata de la Observación 2.11 y del Teorema 2.12.
 \Rightarrow): Para cada $x \in U$, denotemos con I_x a la unión de todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} que contienen a x y están incluidos en U . Escribamos $a_x := \inf(I_x)$ y $b_x := \sup(I_x)$. Es evidente que

$$(a_x, b_x) \subseteq I_x \subseteq \begin{cases} [a_x, b_x] & \text{si } a_x \neq -\infty \text{ y } b_x \neq \infty, \\ (a_x, b_x] & \text{si } a_x = -\infty \text{ y } b_x \neq \infty, \\ [a_x, b_x) & \text{si } a_x \neq -\infty \text{ y } b_x = \infty, \\ (a_x, b_x) & \text{si } a_x = -\infty \text{ y } b_x = \infty, \end{cases}$$

pero como I_x es abierto, forzosamente $I_x = (a_x, b_x)$. Como $x \in U$ es arbitrario, $U = \bigcup I_x$. Para terminar la demostración basta observar que si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, entonces $I_x = I_y$, ya que si no fuera así, $I_x \cup I_y$ sería un intervalo abierto estrictamente mayor que I_x o que I_y , que contendría a x y a y , contradiciendo la definición de I_x o de I_y . \square

2.1.1. El interior de un conjunto

Por el Teorema 2.12, para cada conjunto $A \subseteq X$ hay un subconjunto abierto A° de A , que es máximo en el sentido de que incluye a cualquier otro. En efecto, A° es la unión de todos los subconjuntos abiertos de A .

Definición 2.14. El *interior* de un subconjunto A de X es el máximo subconjunto abierto A° de A . Un punto x de X es un *punto interior* de A si pertenece a A° . En otras palabras, si $B_r(x) \subseteq A$ para algún $r > 0$.

Observación 2.15. La noción de interior de un conjunto no es intrínseca. Esto significa que el interior de un conjunto A depende del espacio ambiente en el cual se lo considera inmerso. Por ejemplo, $[0, 1)^\circ = [0, 1)$ cuando se considera a $[0, 1)$ como subconjunto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$, pero $[0, 1)^\circ = (0, 1)$ cuando se considera como subconjunto de \mathbb{R} . No obstante esto, a veces no mencionaremos explícitamente el espacio ambiente cuando sea obvio cual es. Lo mismo vale para las nociones de exterior, clausura, frontera y borde de un conjunto, que introduciremos enseguida.

Ejemplo 2.16. En \mathbb{R} todo intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ tiene puntos racionales e irracionales. Por lo tanto $\mathbb{Q}^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$ en \mathbb{R} .

Ejemplo 2.17. En \mathbb{R} el interior de cualquiera de los intervalos acotados (a, b) , $(a, b]$, $[a, b]$ y $[a, b)$ es el intervalo abierto (a, b) , el interior de los intervalos $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$ es el intervalo $(-\infty, a)$, y el de los intervalos (a, ∞) y $[a, \infty)$ es (a, ∞) . Para terminar, el interior de $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ es \mathbb{R} , y el de los intervalos degenerados $\emptyset = (a, a) = [a, a) = (a, a]$ y $\{a\} = [a, a]$ es el conjunto vacío.

Teorema 2.18. *Consideremos subconjunto A y B de un espacio métrico X y una familia $(A_j)_{j \in J}$ de subconjuntos de X . Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. $x \in A^\circ$ si y solo si $d(x, X \setminus A) > 0$.

2. $x \in A^\circ$ si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X que tiende a x , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$.
3. $A^\circ \subseteq A$ y $A^\circ = A$ si y solo si A es abierto.
4. Si $A \subseteq B$, entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.
5. $A^{\circ\circ} = A^\circ$.
6. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
7. $\bigcup_{j \in J} A_j^\circ \subseteq (\bigcup_{j \in J} A_j)^\circ$.

Demostración. Si $x \in A^\circ$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$ y, por lo tanto, $d(x, X \setminus A) \geq r > 0$. Recíprocamente, si $d(x, X \setminus A) > 0$, entonces $B_r(x) \subseteq A$ para todo $r < d(x, X \setminus A)$ y, en consecuencia, $x \in A^\circ$. Esto prueba que el ítem 1 es verdadero. El ítem 3 lo es por la misma definición de interior. El ítem 4 por la definición de interior y porque A° es un subconjunto abierto de B . El ítem 5, por el ítem 3 y porque A° es abierto. Por la Observación 1.76, si $x \in A^\circ$, entonces toda sucesión de puntos de X que tiende a x satisface las condición requerida en el ítem 2. Por otra parte si $x \notin A^\circ$, entonces podemos construir una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de $X \setminus A$ que tiende a x , eligiendo $x_n \in B_{1/n}(x) \setminus A$. Esto muestra que el ítem 2 es verdadero (nótese que hemos usado el axioma de elección). Por el ítem 4 sabemos que $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$, y la inclusión recíproca vale porque $A^\circ \cap B^\circ$ es un subconjunto abierto de $A \cap B$. De modo que el ítem 6 también es verdadero. Por último, el ítem 7 se sigue del ítem 3. \square

Proposición 2.19. Consideremos un producto finito $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ de espacios métricos. La igualdad

$$(A_1 \times \cdots \times A_n)^\circ = A_1^\circ \times \cdots \times A_n^\circ$$

vale para cada n -upla (A_1, \dots, A_n) de conjuntos, con $A_i \subseteq X_i$ para todo i .

Demostración. Por el Ejemplo 2.7, sabemos que

$$(A_1 \times \cdots \times A_n)^\circ \supseteq A_1^\circ \times \cdots \times A_n^\circ,$$

y por la descripción de la bolas abiertas de un producto de finitos espacios métricos dada en el Ejemplo 1.33, también vale la inclusión opuesta. En efecto, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in (A_1 \times \cdots \times A_n)^\circ$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r^X(x) \subseteq A$. Como $B_r^X(x) = B_r^{X_1}(x_1) \times \cdots \times B_r^{X_n}(x_n)$, se sigue que $B_r^{X_i}(x_i) \subseteq A_i$ para todo i , y, por lo tanto, que $x \in A_1^\circ \times \cdots \times A_n^\circ$. \square

Recordemos que un subespacio de X es un subconjunto Y de X provisto de la métrica inducida, y que

$$B_r^Y(y) = B_r^X(y) \cap Y \quad \text{y} \quad B_r^Y[y] = B_r^X[y] \cap Y$$

para cada punto $y \in Y$.

Proposición 2.20. Consideremos un subespacio métrico Y de X . Un subconjunto A de Y es abierto en Y si y solo si existe $\tilde{A} \subseteq X$, abierto en X , tal que $A = \tilde{A} \cap Y$.

Demostración. Denotemos con A_Y° al interior de A como subconjunto de Y . Para cada punto y en A_Y° , tomemos una bola abierta $B_{r_y}^Y(y) \subseteq A$. Entonces

$$A^\circ = \bigcup_{y \in A_Y^\circ} B_{r_y}^Y(y) = \bigcup_{y \in A_Y^\circ} (B_{r_y}^X(y) \cap Y) = \left(\bigcup_{y \in A_Y^\circ} B_{r_y}^X(y) \right) \cap Y.$$

En consecuencia, si A es abierto en Y , entonces A es la intersección de Y con un abierto de X . Recíprocamente, supongamos que A es la intersección de Y con un abierto U de X . Para todo $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r^X(y) \subseteq U$. Así, $B_r^Y(y) = B_r^X(y) \cap Y$ está incluido en $U \cap Y = A$, por lo que $x \in A^\circ$. Como esto vale para todo $x \in A$, A es un subconjunto abierto de Y . \square

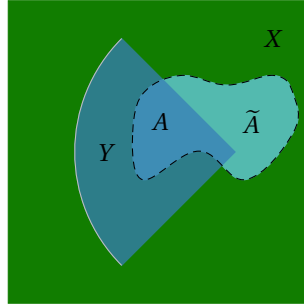


Figura 2.2: Ilustración de la Proposición 2.20

Definición 2.21. El exterior de un subconjunto A de X es el conjunto $\text{Ext}(A) := (X \setminus A)^\circ$.

Observación 2.22. Un punto $x \in X$ pertenece al exterior de A si y solo si $d(x, A) > 0$. En efecto, es claro que $B_r(x) \subseteq X \setminus A$ si y solo si $d(x, A) \geq r$.

2.1.2. Bases de un espacio métrico

Definición 2.23. Una base de X es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, de subconjuntos abiertos de X , tal que

$$U = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ V \subseteq U}} V, \tag{2.1}$$

para todo abierto U de X .

Observación 2.24. La condición (2.1) se satisface si y solo si para cada abierto U de X y cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Ejemplo 2.25. Como un subconjunto de un espacio métrico es abierto si y solo si es unión de bolas abiertas, los conjuntos $\{B_r(x) : x \in X \text{ y } r > 0\}$ y $\mathcal{B}' = \{B_{1/n}(x) : x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ son bases de cada espacio métrico X .

Ejemplo 2.26. El conjunto $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \text{ y } a < b\}$, de los intervalos abiertos con extremos racionales, es una base de \mathbb{R} . En efecto, supongamos que U es un abierto de \mathbb{R} . Entonces fijado un punto $x \in U$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U$. Como entre dos números reales cualesquiera hay un número racional, existen $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $x - \epsilon < r < x$ y $x < s < x + \epsilon$, de modo que $x \in (r, s) \subseteq U$. Por la Observación 2.24 esto prueba que $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}$ es una base de entornos de \mathbb{R} , como afirmamos.

Observación 2.27. Como cada abierto de X es unión de bolas abiertas, para comprobar que un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, de subconjuntos abiertos de X , es una base de X , es suficiente comprobar que cada bola abierta es unión de miembros de \mathcal{B} o, equivalentemente, que para cada bola abierta $B_r(x_0)$ y cada punto $x \in B_r(x_0)$, existe un $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V \subseteq B_r(x_0)$.

Observación 2.28. Si \mathcal{B} es una base de X , entonces $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ es una base de Y para cada subespacio Y de X . En efecto, por la Proposición 2.20, fijado un subconjunto abierto V de Y , hay un abierto W de X tal que $V = W \cap Y$. Además, como \mathcal{B} es una base de X ,

$$W = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$$

para una familia $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de elementos de \mathcal{B} . Pero entonces

$$V = W \cap Y = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \cap Y.$$

Proposición 2.29. Consideremos espacios métricos X_1, \dots, X_n . Si \mathcal{B}_i es una base de X_i ($1 \leq i \leq n$), entonces el conjunto

$$\mathcal{B} := \{V_1 \times \dots \times V_n : V_i \in \mathcal{B}_i \text{ para todo } i\}$$

es una base de $X := X_1 \times \dots \times X_n$.

Demostración. Por la Observación 2.27 para probar esto es suficiente notar que para cada bola abierta $B_r^X(x_1, \dots, x_n)$ de X y cada punto (x'_1, \dots, x'_n) de $B_r^X(x_1, \dots, x_n)$ existe un abierto $V_1 \times \dots \times V_n \in \mathcal{B}$ tal que

$$(x'_1, \dots, x'_n) \in V_1 \times \dots \times V_n \subseteq B_r^X(x_1, \dots, x_n).$$

Pero esto es cierto porque, por el Ejemplo 1.33,

$$B_r^X(x_1, \dots, x_n) = B_r^{X_1}(x_1) \times \dots \times B_r^{X_n}(x_n)$$

y porque para cada i existe un $V_i \in \mathcal{B}_i$ tal que $x_i \in V_i \subseteq B_r(x_i)$, debido a que \mathcal{B}_i es una base de X_i para todo i . \square

2.1.3. Subbases de un espacio métrico

Definición 2.30. Una *subbase de X* es cualquier conjunto \mathcal{S} de abiertos de X tal que el conjunto de las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} forman una base de X .

Ejemplo 2.31. Como $(b, c) = (b, +\infty) \cap (-\infty, c)$ para todo $b, c \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$\{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

es una subbase de \mathbb{R} .

Ejemplo 2.32. Por el Ejemplo 2.26, el conjunto $\{(b, +\infty) : b \in \mathbb{Q}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{Q}\}$ también es una subbase de \mathbb{R} .

Ejemplo 2.33. Para cada producto $X \times Y$ de espacios métricos, el conjunto

$$\{B_r(x) \times Y : x \in X \text{ y } r \in \mathbb{R}\} \cup \{X \times B_s(y) : y \in Y \text{ y } s \in \mathbb{R}\}$$

es una subbase de $X \times Y$. En efecto, esto se sigue inmediatamente de que, por el Ejemplo 1.33,

$$(B_r(x) \times Y) \cap (X \times B_s(y)) = B_r^X(x) \times B_s^Y(y) = B_r^{X \times Y}(x, y).$$

Más generalmente, para cada producto finito $X_1 \times \dots \times X_n$ de espacios métricos, el conjunto

$$\{X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times B_r(x_i) \times X_{i+1} \times \dots \times X_n : 1 \leq i \leq n, x_i \in X_i \text{ y } r \in \mathbb{R}\}$$

es una subbase de $X_1 \times \dots \times X_n$.

Tal como ocurre con el concepto de subbase de entornos, la importancia de la noción de subbase se debe a que algunos espacios métricos tienen subbases muy simples, y a que (como veremos por ejemplo al estudiar la continuidad de funciones) hay condiciones que en principio deberían verificarse sobre todos los abiertos, pero que es suficiente comprobar sobre una subbase, lo que permite obtener demostraciones simples de algunos resultados importantes. Nosotros no adoptamos este punto de vista en estas notas, salvo en algunos ejercicios.

Ejercicios

1. Pruebe que para cada función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ los conjuntos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\}$ son subconjuntos abiertos de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Pruebe que la descomposición de un abierto U de \mathbb{R} como unión disjunta de intervalos abiertos obtenida en el Teorema 2.13 es única. Pruebe también que la cantidad de intervalos es finita o numerable.
3. Pruebe que en el último item del Teorema 2.18 la inclusión puede ser estricta.
4. Pruebe que toda base de un espacio métrico X es una subbase de X .
5. Consideremos una familia finita X_1, \dots, X_n de espacios métricos. Pruebe que si \mathcal{S}_i es una subbase de X_i ($i = 1, \dots, n$), entonces el conjunto

$$\{X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times S \times X_{i+1} \times \dots \times X_n : 1 \leq i \leq n \text{ y } S \in \mathcal{S}_i\}$$

es una subbase de $X_1 \times \dots \times X_n$.

2.2. Conjuntos cerrados

Definición 2.34. Un subconjunto C de X es *cerrado* si $X \setminus C$ es abierto.

Observación 2.35. Hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo, en \mathbb{R} el intervalo $[0, 1)$ no lo es.

Ejemplo 2.36. Dados números reales $a \leq b$, el intervalo cerrado $[a, b]$ es un subconjunto cerrado de \mathbb{R} . Para cada $a \in \mathbb{R}$ los intervalos cerrados $(-\infty, a]$ y $[a, \infty)$ también son subconjuntos cerrados de \mathbb{R} .

Ejemplo 2.37. Para cada espacio métrico X y cada $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es cerrado. En efecto $X \setminus \{x\}$ es abierto, porque $B_r(y) \subseteq X \setminus \{x\}$ para todo $y \neq x$ y todo $0 < r < d(x, y)$.

Ejemplo 2.38. Todos los subconjuntos de un espacio métrico discreto X son subconjuntos cerrados de X , porque todos son abiertos.

Ejemplo 2.39. Los conjuntos $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ y $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq f(x)\}$ son subconjuntos cerrados de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, para cada función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para probar que el primero lo es, debemos ver que su complemento $A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < f(x)\}$ y $B^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$ son abiertos. Pero esto es cierto por el Ejercicio 1 de la Sección 2.1.

Ejemplo 2.40. Consideremos espacios métricos X e Y . El producto $A \times B$ de un subconjunto cerrado de X con un subconjunto cerrado B de Y es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Esto es así porque su complemento $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ es unión de los conjuntos $(X \setminus A) \times Y$ y $X \times (Y \setminus B)$, que son abiertos

por el Ejemplo 2.7. En consecuencia el producto $A_1 \times \cdots \times A_n$ de cerrados A_i de espacios métricos X_i ($i = 1, \dots, n$) es cerrado en $X_1 \times \cdots \times X_n$. El ejemplo anterior muestra que no todos los subconjuntos cerrados de un producto finito de espacios métricos tienen esta forma.

Ejemplo 2.41. Los conjuntos cerrados de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ y de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ son los mismos, porque sus conjuntos abiertos lo son. Más adelante veremos que, más generalmente, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$ tienen los mismos cerrados para todo $n \geq 1$ y cada $p, q \geq 1$.

Ejemplo 2.42. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el conjunto $A := \{f \in B[a, b] : f(x) \leq 1 \text{ para todo } x\}$ es un cerrado de $B[a, b]$. Para comprobarlo es suficiente verificar que $B_{r-1}(h) \subseteq A^c$ para cada $h \in A^c$, donde $r := \sup_{x \in [a, b]} h(x)$, pero esto es cierto porque si $g \in B_{r-1}(h)$, entonces

$$\sup_{x \in [a, b]} g(x) = \sup_{x \in [a, b]} (h(x) + g(x) - h(x)) \geq \sup_{x \in [a, b]} h(x) - \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - h(x)| > r - (r - 1) = 1,$$

donde la primera desigualdad vale debido a que para todo $\epsilon > 0$ existe $\tilde{x} \in [a, b]$ tal que $h(\tilde{x}) > r - \epsilon$, y por lo tanto

$$h(\tilde{x}) + g(\tilde{x}) - h(\tilde{x}) > r - \epsilon - \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - h(x)|.$$

Ejemplo 2.43. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, el conjunto $B := \{f \in C[a, b] : f(x) \leq 1 \text{ para todo } x\}$ es un subconjunto cerrado de $C[a, b]$. Por la Proposición 2.20, para comprobar que esto es cierto es suficiente notar que $B^c = A^c \cap C[a, b]$, donde A es como en el Ejemplo 2.42.

Observación 2.44. Por la Observación 2.11, en todo espacio métrico las bolas cerradas y los complementos de las bolas abiertas son conjuntos cerrados.

Teorema 2.45. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. X y \emptyset son cerrados.
2. Si $(C_j)_{j \in J}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X , entonces $\bigcap_{j \in J} C_j$ es cerrado.
3. Si C y D son subconjuntos cerrados de X , entonces $C \cup D$ es cerrado.

Demostración. Es claro que X y \emptyset son cerrados. Si $(C_j)_{j \in J}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X , entonces $\bigcap_{j \in J} C_j$ es cerrado porque, por las Leyes de Morgan,

$$X \setminus \bigcap_{j \in J} C_j = \bigcup_{j \in J} X \setminus C_j,$$

que es abierto por el Teorema 2.12. Por último, para concluir que $C \cup D$ es cerrado si C y D lo son, es suficiente notar que

$$X \setminus (C \cup D) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D)$$

es abierto por Teorema 2.12. □

2.2.1. El conjunto de Cantor

Ahora vamos a introducir un ejemplo famoso de conjunto cerrado que tiene muchas propiedades interesantes. Por ejemplo, en un sentido es muy pequeño porque tiene interior vacío, pero en otro sentido es muy grande, porque tiene el cardinal del continuo. Tomemos el intervalo $J_0 := [0, 1]$ y quitémosle el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. El conjunto resultante J_1 es unión de los intervalos cerrados $I_0 := [0, \frac{1}{3}]$ e $I_1 := [\frac{2}{3}, 1]$, de longitud $\frac{1}{3}$. Partamos cada uno de estos intervalos en tres partes iguales, y eliminemos el intervalo abierto del medio. El conjunto obtenido J_2 es unión de los cuatro intervalos $I_{00} := [0, \frac{1}{9}]$,

$I_{01} := [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$, $I_{10} := [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}]$ e $I_{11} := [\frac{8}{9}, 1]$, cada uno de longitud $\frac{1}{9}$. Partiendo cada uno de estos intervalos en tres partes iguales y quitando el intervalo abierto del medio, obtenemos el conjunto J_3 , el cual es unión de los ocho intervalos cerrados $I_{000} := [0, \frac{1}{27}]$, $I_{001} := [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}]$, $I_{010} := [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}]$, $I_{011} := [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}]$, $I_{100} := [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}]$, $I_{101} := [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}]$, $I_{110} := [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}]$ e $I_{111} := [\frac{26}{27}, 1]$. Continuando con este proceso recursivo obtenemos una familia de conjuntos

$$J_1 \supseteq J_2 \supseteq J_3 \supseteq \dots \supseteq J_n \supseteq \dots,$$

donde J_n es la unión de 2^n intervalos cerrados disjuntos $I_{i_1 \dots i_n}$ ($i_h \in \{0, 1\}$), cada uno de longitud $\frac{1}{3^n}$ (ver la Figura 2.3).

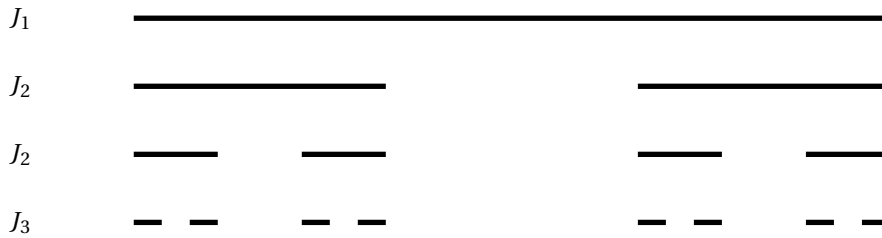


Figura 2.3: Primeros pasos en la construcción del conjunto de Cantor

Definición 2.46. El conjunto de Cantor \mathfrak{C} es la intersección $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ de todos los J_n 's.

Observación 2.47. Como cada J_n es cerrado, \mathfrak{C} es cerrado, y como J_n no incluye a ninguna bola abierta de radio mayor que $\frac{1}{3^n}$, \mathfrak{C} tiene interior vacío.

Lema 2.48. Los extremos izquierdo y derecho del intervalo $I_{i_1 \dots i_n}$ son los números racionales

$$\sum_{h=1}^n \frac{2 i_h}{3^h} \quad \text{y} \quad \sum_{h=1}^n \frac{2 i_h}{3^h} + \frac{1}{3^n} = \sum_{h=1}^n \frac{2 i_h}{3^h} + \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^h}, \tag{2.2}$$

Demostración. Lo probaremos por inducción en n . Es claro que el resultado es cierto para I_0 e I_1 . Supongamos que lo es para $I_{i_1 \dots i_n}$. Entonces, como $I_{i_1 \dots i_{n+1}}$ es construido partiendo $I_{i_1 \dots i_n}$ en tres intervalos iguales (de longitud $\frac{1}{3^{n+1}}$) y tomando el intervalo de la izquierda si $i_{n+1} = 0$ y el de la derecha si $i_{n+1} = 1$, los extremos izquierdo y derecho de $I_{i_1 \dots i_{n+1}}$ son

$$\frac{2 i_{n+1}}{3^{n+1}} + \sum_{h=1}^n \frac{2 i_h}{3^h} = \sum_{h=1}^{n+1} \frac{2 i_h}{3^h} \quad \text{y} \quad \sum_{h=1}^{n+1} \frac{2 i_h}{3^h} + \frac{1}{3^{n+1}} = \sum_{h=1}^{n+1} \frac{2 i_h}{3^h} + \sum_{h=n+2}^{\infty} \frac{2}{3^h},$$

respectivamente. □

Teorema 2.49. El conjunto de Cantor \mathfrak{C} es el conjunto de todos los números reales que tienen una expresión en base 3 de la forma $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{3^h}$, con cada $a_h = 0$ o 2 . Además esta escritura es única (a pesar de que como el lector sabrá, o habrá notado por la igualdad en (2.2), la escritura en base 3 de un número real puede no serlo).

Demostración. Como J_n es unión disjunta de los intervalos $I_{i_1 \dots i_n}$ ($i_h \in \{0, 1\}$) e $I_{i_1 \dots i_{n+1}} \subseteq I_{j_1 \dots j_n}$ si y solo si $j_l = i_l$ para todo l , un número real x pertenece a \mathfrak{C} si y solo si existen $i_1, i_2, \dots, i_h, \dots \in \{0, 1\}$ tales que $x \in I_{i_1 \dots i_n}$ para todo n . Por el Lema 2.48, esto ocurre si y solo si

$$x = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{3^h}, \quad \text{donde } a_h = 2 i_h.$$

La unicidad se sigue inmediatamente de que los $i_1, i_2, \dots, i_h, \dots$ son únicos. □

Corolario 2.50. La función $f: \mathcal{C} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$f\left(\sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{3^h}\right) := \left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{2}, \dots\right)$$

es biyectiva y, por lo tanto, \mathcal{C} tiene el cardinal del continuo.

Demostración. Esto se sigue inmediatamente del Teorema 2.49. □

2.2.2. La clausura de un conjunto

Definición 2.51. La *clausura* o *adherencia* \bar{A} , de un subconjunto A de X , es la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que incluyen a A .

Observación 2.52. Por su misma definición y el Teorema 2.45, la clausura de A es el mínimo cerrado que incluye a A .

Ejemplo 2.53. Como todo subconjunto abierto no vacío de \mathbb{R} tiene puntos de \mathbb{Q} y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la clausura de \mathbb{Q} en \mathbb{R} es \mathbb{R} , y lo mismo es cierto para la clausura de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en \mathbb{R} .

Ejemplo 2.54. En \mathbb{R} la clausura de los intervalos acotados (a, b) , $(a, b]$, $[a, b]$ y $[a, b)$ es el intervalo cerrado $[a, b]$, la clausura de los intervalos $(-\infty, a)$ y $(-\infty, a]$ es el intervalo $(-\infty, a]$, y la de los intervalos (a, ∞) y $[a, \infty)$ es $[a, \infty)$. Por supuesto, la clausura $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ es \mathbb{R} . Además la de los intervalos degenerados $\emptyset = (a, a) = [a, a) = (a, a] = [a, a]$ es el conjunto vacío y la del intervalo degenerado $\{a\} = [a, a]$ es $\{a\}$.

Proposición 2.55. $X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^\circ$ y $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

Demostración. La primera igualdad vale porque $(X \setminus A)^\circ$ es el máximo subconjunto abierto de $X \setminus A$ y, por lo tanto, es el complemento del mínimo cerrado que incluye a A . La otra igualdad se puede probar de la misma manera. Dejamos los detalles al lector. □

Proposición 2.56. Para todo $A \subseteq X$ y cada $x \in X$ son equivalentes:

1. $x \in \bar{A}$.
2. $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.
3. $V \cap A \neq \emptyset$ para todo entorno V de x .
4. Hay una sucesión de puntos de A que tiende a x .
5. $d(x, A) = 0$.

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Si existiera $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap A = \emptyset$, entonces $B_r(x)$ estaría incluido en $X \setminus A$ y, por lo tanto, x pertenecería a $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}$, lo que es absurdo.

2. \Rightarrow 3. Porque todo entorno de x incluye una bola abierta con centro x .

3. \Rightarrow 4. Tomemos $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Es evidente que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a x .

4. \Rightarrow 1. Como es el límite de una sucesión de puntos de A ,

$$x \notin (X \setminus A)^\circ = X \setminus \bar{A}.$$

Así, $x \in \bar{A}$.

2. \Leftrightarrow 5. Por la misma definición de bola abierta, $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$ si y solo si x tiene puntos de A arbitrariamente cerca, o, equivalentemente, si y solo si $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$. □

Teorema 2.57. Las siguientes afirmaciones son verdaderas para cada par de subconjuntos A y B de X :

1. $A \subseteq \bar{A}$ y $A = \bar{A}$ si y solo si A es cerrado.
2. $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$.
3. $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.
4. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
5. $\overline{\bigcap_{j \in J} A_j} \subseteq \bigcap_{j \in J} \bar{A}_j$.

Demostración. El ítem 1 es verdadero por la misma definición de clausura. El ítem 2 por la definición de clausura y porque \bar{B} es un conjunto cerrado que incluye a A , y el ítem 3, por el ítem 1 y porque \bar{A} es cerrado. Por el ítem 2 sabemos que $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$, y la inclusión recíproca vale porque $\bar{A} \cup \bar{B}$ es un subconjunto cerrado de X que incluye a $A \cup B$. La última afirmación se sigue del ítem 2. \square

Proposición 2.58. Consideremos un producto finito $X_1 \times \cdots \times X_n$ de espacios métricos. La igualdad

$$\overline{A_1 \times \cdots \times A_n} = \bar{A}_1 \times \cdots \times \bar{A}_n$$

vale para cada n -upla (A_1, \dots, A_n) de conjuntos, con $A_i \subseteq X_i$ para todo i .

Demostración. Por una inducción fácil basta probarlo cuando $n = 2$. Por el Ejemplo 2.40 sabemos que $\bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ es un cerrado (que claramente incluye a $A_1 \times A_2$). Entonces, por la Proposición 2.56, para concluir que es la adherencia de $A_1 \times A_2$ es suficiente notar que toda bola $B_r(a_1) \times B_r(a_2)$ con centro en un punto $(a_1, a_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$ tiene puntos de $A_1 \times A_2$. \square

Definición 2.59. Un punto $x \in X$ es un *punto de acumulación* de un subconjunto A de X , si

$$B_r(x) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \text{para todo } r > 0.$$

Dicho de otra forma, si toda bola abierta con centro x contiene puntos de A distintos de x , o, equivalentemente, si $d(x, A \setminus \{x\}) = 0$. Denotamos con A' al conjunto de los puntos de acumulación de A .

Observación 2.60. Para que $x \in X$ sea un punto de acumulación de A es necesario y suficiente que exista una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos distintos de $A \setminus \{x\}$ que tienda a x .

Observación 2.61. Es claro que $A' \subseteq \bar{A}$ y que si $x \in \bar{A} \setminus A$, entonces $x \in A'$. Así,

$$\bar{A} = A \cup A'. \tag{2.3}$$

En consecuencia, A es cerrado si y solo si $A' \subseteq A$.

Definición 2.62. Un punto $x \in A$ es un *punto aislado* de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap A = \{x\}$, es decir si no es un punto de acumulación de A . Denotamos con $\text{ais}(A)$ al conjunto de los puntos aislados de A . Un punto $x \in X$ es *aislado* si es un punto aislado de X .

Observación 2.63. Por la igualdad (2.3) y la misma definición de $\text{ais}(A)$,

$$\bar{A} = \text{ais}(A) \cup A' \quad \text{y} \quad \text{ais}(A) \cap A' = \emptyset.$$

Observación 2.64. Un punto $x \in X$ es un punto aislado si y solo si el conjunto $\{x\}$ es abierto. En efecto, si x es un punto aislado, entonces existe $r > 0$ tal que

$$\{x\} = B_r(x) \cap X = B_r(x)$$

y, en consecuencia, $\{x\}$ es abierto. Recíprocamente, si esto es cierto, entonces existe $r > 0$ tal que

$$\{x\} \subseteq B_r(x) \cap X = B_r(x) \subseteq \{x\},$$

lo que dice que x es aislado.

Definición 2.65. Un conjunto $A \subseteq X$ es un *subconjunto discreto* de X si $A' \cap A = \emptyset$. En otras palabras, si todos sus puntos son puntos aislados de A .

Observación 2.66. Un conjunto discreto puede no ser cerrado. Por ejemplo, $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es discreto, pero no es cerrado, porque 0 es un punto de acumulación de A .

Definición 2.67. Un conjunto $A \subseteq X$ es *perfecto* si $A' = A$, o, dicho de otro modo, si A es cerrado y no tiene puntos aislados.

Proposición 2.68. Consideremos un subespacio métrico Y de X . Un subconjunto A de Y es cerrado en Y si y solo si existe $\tilde{A} \subseteq X$, cerrado en X , tal que $A = \tilde{A} \cap Y$.

Demostración. Las equivalencias

$$\begin{aligned} A \text{ es cerrado en } Y &\Leftrightarrow Y \setminus A \text{ es abierto en } Y \\ &\Leftrightarrow \exists U \subseteq X, \text{ abierto en } X, \text{ tal que } U \cap Y = Y \setminus A \\ &\Leftrightarrow \exists U \subseteq X, \text{ abierto en } X, \text{ tal que } (X \setminus U) \cap Y = A, \end{aligned}$$

muestran que la afirmación del enunciado es verdadera. □

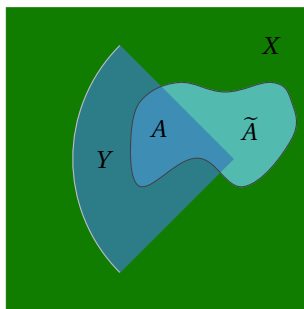


Figura 2.4: Ilustración de la Proposición 2.68

Corolario 2.69. Para cada espacio métrico X , cada subespacio Y de X y cada subconjunto A de Y , las adherencias \overline{A}^X , de A en X , y \overline{A}^Y , de A en Y , satisfacen la igualdad

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y.$$

Demostración. Por el teorema anterior sabemos que $\overline{A}^X \cap Y$ es el mínimo subconjunto cerrado de Y que contiene a A . Por lo tanto es igual a \overline{A}^Y . □

Ejercicios

1. Pruebe que en el último item del Teorema 2.57 la inclusión puede ser estricta.
2. Pruebe la Observación 2.60.
3. Pruebe que el conjunto de Cantor \mathcal{C} es perfecto.

2.3. La frontera y el borde de un conjunto

Definición 2.70. La *frontera* de un subconjunto A de X es el conjunto $\text{Fr}(A) := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

Observación 2.71. La frontera de cada subconjunto de X es un subconjunto cerrado de X , porque es la intersección de dos subconjuntos cerrados de X . Por la Proposición 2.56, la frontera de A es el conjunto de los puntos $x \in X$ cuya distancia a A y a $X \setminus A$ es cero, y también es el conjunto de los puntos $x \in X$ tales que toda bola abierta con centro x tiene puntos de A y puntos de $X \setminus A$. Además, por la Proposición 2.55,

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ. \tag{2.4}$$

En consecuencia

$$A \cup \text{Fr}(A) = A^\circ \sqcup \text{Fr}(A) = \overline{A} \quad \text{y} \quad A \setminus \text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \text{Fr}(A) = A^\circ.$$

Así, A es cerrado si y solo si $\text{Fr}(A) \subseteq A$, y es abierto si y solo si $A \cap \text{Fr}(A) = \emptyset$.

Observación 2.72. Por las Observaciones 2.11 y 2.44, sabemos que si

$$B_r(x) \subseteq A \subseteq B_r[x],$$

entonces $\text{Fr}(A) \subseteq S_r(x)$. La inclusión puede ser estricta. Por ejemplo, si X está dotado de la métrica discreta, entonces $\text{Fr}(B_1(x)) = \emptyset$ y $S_1(x) = X \setminus \{x\}$ para todo $x \in X$. Como veremos enseguida, esto no puede pasar en espacios normados.

Proposición 2.73. Cada bola abierta $B_s(y)$ de un espacio normado E , con centro en un punto y de una esfera $S_r(x)$, tiene puntos de $B_r(x)$ y de $E \setminus B_r[x]$.

Demostración. Consideremos el vector $z := x + \lambda \cdot (y - x)$, donde λ es un escalar. Las igualdades

$$\|x - z\| = \|\lambda \cdot (x - y)\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda|r$$

y

$$\|y - z\| = \|(1 - \lambda) \cdot (y - x)\| = |1 - \lambda|r$$

muestran que

$$z \in B_r(x) \cap B_s(y) \quad \text{si } |\lambda| < 1 \text{ y } |1 - \lambda| < s/r,$$

esto es, si $\lambda \in B_{s/r}^k(1) \cap B_1^k(0) \neq \emptyset$, donde k denota al cuerpo de escalares, y que

$$z \in (E \setminus B_r[x]) \cap B_s(y) \quad \text{si } |\lambda| > 1 \text{ y } |1 - \lambda| < s/r,$$

o, lo que es igual, si $\lambda \in B_{s/r}^k(1) \cap (k \setminus B_1^k[0]) \neq \emptyset$. □

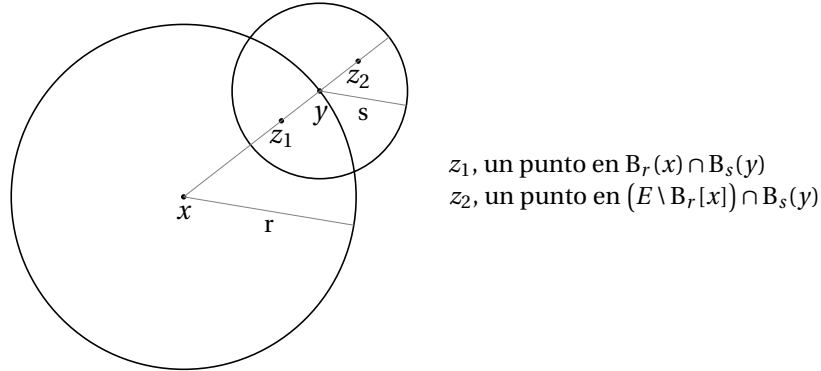


Figura 2.5: Prueba de la Proposición 2.73

Corolario 2.74. Consideremos un conjunto A de un espacio normado E . Si existen un $x \in E$ y un $r > 0$ tales que

$$B_r(x) \subseteq A \subseteq B_r[x],$$

entonces $\text{Fr}(A) = S_r(x)$. En consecuencia $A^\circ = B_r(x)$ y $\bar{A} = B_r[x]$.

Demostración. Por la Proposición 2.73 sabemos que $S_r(x) \subseteq \text{Fr}(A)$. La inclusión opuesta vale porque $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$, $B_r(x)$ es abierto y $B_r[x]$ cerrado. □

Proposición 2.75. Para cada subconjunto A de un espacio métrico X y cada subconjunto B de un espacio métrico Y , la frontera de $A \times B$ como subconjunto de $X \times Y$ satisface

$$\text{Fr}(A \times B) = (\text{Fr}(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \text{Fr}(B)).$$

Demostración. Por la igualdad (2.4) y las Proposiciones 2.19 y 2.58,

$$\begin{aligned} \text{Fr}(A \times B) &= \overline{A \times B} \setminus (A \times B)^\circ \\ &= (\bar{A} \times \bar{B}) \setminus (A^\circ \times B^\circ) \\ &= ((\bar{A} \setminus A^\circ) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times (\bar{B} \setminus B^\circ)) \\ &= (\text{Fr}(A) \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \text{Fr}(B)), \end{aligned}$$

como queremos. □

Corolario 2.76. Consideremos un producto finito $X_1 \times \dots \times X_n$ de espacios métricos. La igualdad

$$\text{Fr}(A_1 \times \dots \times A_n) = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_1 \times \dots \times \bar{A}_{i-1} \times \text{Fr}(A_i) \times \bar{A}_{i+1} \times \dots \times \bar{A}_n$$

vale para cada n -upla (A_1, \dots, A_n) , donde A_i es un subconjunto de X_i .

Demostración. Se sigue de la proposición anterior por inducción en n . Dejamos los detalles al lector (El caso $n = 1$ es trivial. El caso $n = 2$ se necesita para el paso inductivo). □

Ejemplo 2.77. Por el Corolario 2.76, la frontera en $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ del hipercubo abierto

$$\underbrace{(-1, 1) \times \cdots \times (-1, 1)}_{n \text{ veces}},$$

es el subconjunto

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in [-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1] : \text{existe } i \text{ con } x_i = -1 \text{ o } x_i = 1\}$$

de \mathbb{R}^n . Más generalmente, por los Corolarios 2.74 y 2.76, dados espacios normados E_1, \dots, E_n , la frontera en $E_1 \times \cdots \times E_n$ del conjunto $B_1^{E_1}(0) \times \cdots \times B_1^{E_n}(0)$, es el conjunto

$$\bigcup_{i=1}^n B_1^{E_1}[0] \times \cdots \times B_1^{E_{i-1}}[0] \times S_1^{E_i}(0) \times B_1^{E_{i+1}}[0] \times \cdots \times B_1^{E_n}[0].$$

Definición 2.78. El *borde* de un subconjunto A de X es el conjunto $\partial(A) := A \setminus A^\circ$.

Observación 2.79. Para cada subconjunto A de X ,

$$\partial(X \setminus A) = (X \setminus A) \setminus (X \setminus A)^\circ = (X \setminus A) \setminus (X \setminus \bar{A}) = \bar{A} \setminus A.$$

Observación 2.80. La relación entre el borde y la frontera de un conjunto está dada por las igualdades

$$\partial(A) = \text{Fr}(A) \cap A \quad \text{y} \quad \text{Fr}(A) = \partial(A) \cup \partial(X \setminus A).$$

En efecto,

$$\text{Fr}(A) \cap A = (\bar{A} \setminus A^\circ) \cap A = A \setminus A^\circ = \partial(A)$$

y

$$\partial(A) \cup \partial(X \setminus A) = (A \setminus A^\circ) \cup (\bar{A} \setminus A) = \bar{A} \setminus A^\circ = \text{Fr}(A).$$

Ejercicios

1. Calcule la frontera de $\mathbb{R} \times \{0\}$ como subconjunto de \mathbb{R}^2 .
2. Consideremos el conjunto $A = (0, 1] \cup \{\frac{2n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Calcule A° , \bar{A} , A' , $\text{Fr}(A)$ y $\partial(A)$, con A pensado como subconjunto de los espacios \mathbb{R} , $\mathbb{R}_{>0}$ y $(0, 1] \cup (2, \infty)$ (provistos de la distancia usual).
3. Pruebe que para cada espacio métrico X y cada subconjunto A de X es cierto que:
 - a) $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(X \setminus A)$.
 - b) $X = A^\circ \sqcup \text{Fr}(A) \sqcup \text{Ext}(A)$.
 - c) $\text{Fr}(A) = \emptyset$ si y solo si A es abierto y cerrado.
 - d) $\text{Fr}(A)$ es cerrado.
 - e) $\text{Fr}(A) = \partial(A)$ si y solo si A es cerrado.
 - f) $\partial(A)^\circ = \emptyset$.
 - g) $\partial(A) = A \cap \overline{X \setminus A}$.
 - h) $\partial(\partial(A)) = \partial(A)$.

FUNCIONES CONTINUAS, FUNCIONES UNIFORMEMENTE CONTINUAS E ISOMETRÍAS

3.1. Funciones continuas

Definición 3.1. Una función $f: X \rightarrow Y$ es *continua en un punto* $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$, es *continua en un subconjunto* A de X si lo es en cada punto de A , y es *continua* si es continua en X .

Ejemplos 3.2. La inclusión canónica $i_A: A \rightarrow X$ es continua para cada espacio métrico X y cada subespacio A de X , y las funciones constantes

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c_{y_0}} & Y \\ x & \longmapsto & y_0 \end{array}$$

son continuas para cada par de espacios métricos X, Y . En particular, la función identidad id_X es continua.

Observación 3.3. De la definición de continuidad en un punto se sigue inmediatamente que si x es un punto aislado de X , entonces para cada espacio métrico Y , toda función $f: X \rightarrow Y$ es continua en x .

Proposición 3.4. *Son equivalentes:*

1. $f: X \rightarrow Y$ es continua en x .
2. Para todo entorno abierto U de $f(x)$ hay un entorno abierto V de x tal que $f(V) \subseteq U$.
3. $f^{-1}(U)$ es un entorno de x , para cada entorno U de $f(x)$.
4. $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $f(x)$, para cada sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que tiende a x .

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x)) \subseteq U.$$

Así que podemos tomar $V = B_\delta(x)$.

2. \Rightarrow 3. Tomemos un entorno abierto U' de $f(x)$ incluido en U . Por hipótesis existe un entorno abierto V' de x tal que $f(V') \subseteq U'$. Como $f^{-1}(U) \supseteq V'$, esto prueba que $f^{-1}(U)$ es un entorno de x .

3. \Rightarrow 1. Para cada $\epsilon > 0$, la preimagen por f de $B_\epsilon(f(x))$ es un entorno de x y, por lo tanto, incluye a una bola abierta $B_\delta(x)$.

3. \Rightarrow 4. Dado $\epsilon > 0$ tomemos un entorno V de x tal que $f(V) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. Si n_0 es tal que $x_n \in V$ siempre que $n \geq n_0$, entonces $f(x_n) \in B_\epsilon(f(x))$ siempre que $n \geq n_0$.

4. \Rightarrow 3. Supongamos que hay un entorno V de $f(x)$ tal que $f^{-1}(V)$ no es un entorno de x . Entonces tomando para cada $n \in \mathbb{N}$ un punto $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \setminus f^{-1}(V)$, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que tiende a x , tal que la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ no tiende a $f(x)$. \square

Teorema 3.5. *Para cada función $f: X \rightarrow Y$ son equivalentes:*

1. f es continua.
2. $f^{-1}(U)$ es abierto en X para cada subconjunto abierto U de Y .
3. $f^{-1}(C)$ es cerrado en X para cada subconjunto cerrado C de Y .
4. $f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ para cada $B \subseteq X$.

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Por la equivalencia entre los ítems 1 y 3 de la proposición anterior, $f^{-1}(U)$ es un entorno de cada uno de sus puntos.

2. \Rightarrow 1. Fijemos $x \in X$ y un entorno abierto U de $f(x)$. Por hipótesis $f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de x . Esto termina la demostración, porque $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$.

2. \Rightarrow 3. Si C es un cerrado de Y , entonces $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X , porque

$$f^{-1}(C) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus C)$$

y, por hipótesis, $f^{-1}(Y \setminus C)$ es cerrado.

3. \Rightarrow 2. Si A es un cerrado de Y , entonces $f^{-1}(A)$ es un cerrado de X , porque

$$f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$$

y, por hipótesis, $f^{-1}(Y \setminus A)$ es abierto. .

3. \Rightarrow 4. Como $B \subseteq f^{-1}(\overline{f(B)})$ y $f^{-1}(\overline{f(B)})$ es cerrado, $\overline{B} \subseteq f^{-1}(\overline{f(B)})$.

4. \Rightarrow 3. Tomemos un cerrado arbitrario C de X' . Por hipótesis

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$$

y, en consecuencia, $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$, lo que prueba que $f^{-1}(C)$ es cerrado. \square

Proposición 3.6. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas para cada terna X, Y, Z de espacios métricos, cada subconjunto A de X y cada subconjunto B de Y .*

1. Si $f: X \rightarrow Y$ es continua en A y $g: Y \rightarrow Z$ es continua en $f(A)$, entonces $g \circ f$ es continua en A .
2. Si $f: X \rightarrow Y$ es continua en A y $f(A) \subseteq B$, entonces la función $f|_A^B: A \rightarrow B$, obtenida restringiendo el dominio de f a A y el codominio de f a B , es continua.

Demostración. 1) Como f es continua en A y g es continua en $f(A)$, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $a \in A$, entonces $f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $f(a)$ y $g \circ f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $g \circ f(a)$.

2) Primero notemos que $f|_A$ es continua porque es la composición de f con $i_A: A \rightarrow X$, y ambas funciones son continuas. Pero entonces por la Observación 1.79, dada una sucesión arbitraria $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que tiende a un punto $a \in A$, la sucesión $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ formada por sus imágenes tiende a $f(a)$ en B y, por lo tanto, la función $f|_A$ es continua. \square

Nota 3.7. El ítem 2 de la proposición anterior dice que si una función definida sobre X es continua en un subconjunto A de X , entonces su restricción a A es continua. La recíproca no vale. Por ejemplo, la función $\chi_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

es continua restringida a \mathbb{Q} y a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pero no es continua en ni en \mathbb{Q} ni en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proposición 3.8. *Las proyecciones canónicas $p_X: X \times Y \rightarrow X$ y $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ son funciones continuas para cada par de espacios métricos X e Y . Además, para todo espacio métrico Z , una función $f: Z \rightarrow X \times Y$ es continua en $z \in Z$ si y solo si las funciones coordenadas $f_X := p_X \circ f$ y $f_Y := p_Y \circ f$ son continuas en z . En consecuencia f es continua si y solo si f_X y f_Y lo son.*

Demostración. Tomemos una sucesión $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de Z que tiende a z . Por la Proposición 1.81, sabemos que la sucesión $f(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $f(z)$ si y solo si $f_X(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $f_X(z)$ y $f_Y(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $f_Y(z)$. Por la equivalencia entre los ítems 1 y 4 de la Proposición 3.4, esto prueba la segunda afirmación. La primera se deduce de esta tomando $f = \text{id}_{X \times Y}$. \square

Corolario 3.9. *Una función $f: Z \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ es continua en un punto $z \in Z$ si y solo si las funciones coordenadas $f_{X_j} := p_j \circ f$ ($j \in \{1, \dots, n\}$), donde $p_j: X \rightarrow X_j$ es la proyección canónica, son continuas en z . En consecuencia f es continua si y solo si las funciones f_{X_j} lo son.*

Demostración. Esto se sigue de la Proposición 3.8 por inducción en n . \square

Corolario 3.10. *Para cada familia finita $f_j: X_j \rightarrow Y_j$ ($1 \leq j \leq n$), de funciones continuas, la función*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_n & \xrightarrow{f_1 \times \dots \times f_n} & Y_1 \times \dots \times Y_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \end{array}$$

es continua.

Demostración. Basta observar que $p_j \circ (f_1 \times \dots \times f_n) = f_j \circ p_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, y que estas funciones son continuas debido a que son composiciones de funciones continuas. \square

Proposición 3.11. *Consideremos una función $f: X \rightarrow Y$. Supongamos que X es unión $X = C_1 \cup C_2$ de dos subconjuntos cerrados. Si $f|_{C_1}$ y $f|_{C_2}$ son continuas, entonces f es continua.*

Demostración. Para cada subconjunto cerrado C de Y ,

$$f^{-1}(C) = f|_{C_1}^{-1}(C \cap C_1) \cup f|_{C_2}^{-1}(C \cap C_2)$$

es cerrado porque es unión de dos cerrados. \square

Definición 3.12. Decimos que una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ *separa dos subconjuntos disjuntos* A y B de X si f vale cero sobre A y uno sobre B .

El siguiente resultado muestra que para cada par de cerrados disjuntos hay una función continua que los separa.

Teorema 3.13. *Supongamos que C y D son subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio métrico X , tales que $C \cap D = \emptyset$. Entonces la función $\zeta_{C,D}: X \rightarrow [0, 1]$, dada por*

$$\zeta_{C,D}(x) := \frac{d(x, C)}{d(x, C) + d(x, D)},$$

está bien definida, es continua, se anula sobre C y vale 1 sobre D .

Demostración. Por la Proposición 2.56, como C y D son cerrados disjuntos,

$$d(x, C) + d(x, D) > 0 \quad \text{para todo } x \in X.$$

Además, es claro que $0 \leq \zeta_{C,D}(x) \leq 1$ para todo x . Por lo tanto, la función $\zeta_{C,D}$ está bien definida. Para probar que es continua es suficiente notar que es cociente de funciones reales que lo son. Por último, es claro que $\zeta_{C,D}$ vale cero sobre C y uno sobre D . \square

Corolario 3.14. *Fijados un cerrado C y un abierto U de X , con $C \subseteq U$, existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$, tal que $f|_D = 1$ y $f|_{X \setminus U} = 0$.*

Demostración. Aplíquese el Teorema 3.13 con $D = X \setminus U$. \square

Corolario 3.15. *Fijados un punto $x \in X$ y un entorno abierto U de x , existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$, tal que $f(x) = 1$ y $f|_{X \setminus U} = 0$.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del corolario anterior, porque los puntos son cerrados. \square

Corolario 3.16. *Fijados subconjuntos cerrados y no vacíos C y D de un espacio métrico X , tales que $C \cap D = \emptyset$, existen abiertos disjuntos U y V de X , tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$.*

Demostración. Se puede tomar $U := \zeta_{C,D}(-\infty, \frac{1}{2})$ y $V := \zeta_{C,D}(\frac{1}{2}, \infty)$, donde $\zeta_{C,D}$ es la función introducida en el Teorema 3.13. \square

Definición 3.17. Una función continua $f: X \rightarrow Y$ es un *homeomorfismo* si es biyectiva y su inversa es continua. Dos espacios métricos X e Y son *homeomorfos* o *topológicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo de X en Y .

Observación 3.18. Si X e Y son homeomorfos escribimos $X \simeq Y$. La relación de homeomorfismo es reflexiva simétrica y transitiva, porque $\text{id}: X \rightarrow X$ es un homeomorfismo para todo espacio métrico X , si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $f^{-1}: Y \rightarrow X$ también lo es, y la composición de dos homeomorfismos es un homeomorfismo.

Definición 3.19. Una propiedad de espacios métricos es una *propiedad topológica* si cada vez que un espacio métrico X la tiene, la tienen también todos los espacios homeomorfos a X .

Ejemplo 3.20. Si X e Y son homeomorfos, entonces X es perfecto si y solo si Y lo es. Por lo tanto, esta es una propiedad topológica.

Observación 3.21. Una función $f: X \rightarrow Y$ puede ser continua y biyectiva sin ser un homeomorfismo. Un ejemplo es la función identidad $\text{id}: (\mathbb{R}, d) \rightarrow \mathbb{R}$, donde d es la métrica discreta y el codominio es considerado con la métrica usual.

Definición 3.22. Una función $f: X \rightarrow Z$ es *abierto* si $f(U)$ es abierto para todo abierto U de X y es *cerrada* si $f(C)$ es cerrado para todo cerrado C de X .

Ejemplos 3.23. Para cada par X, Y de espacios métricos, la proyecciones canónicas $p_X: X \times Y \rightarrow X$ y $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ son funciones abiertas porque

$$p_X(B_r^{X \times Y}(x, y)) = p_X(B_r^X(x) \times B_r^Y(y)) = B_r^X(x)$$

y

$$p_Y(B_r^{X \times Y}(x, y)) = p_Y(B_r^X(x) \times B_r^Y(y)) = B_r^Y(y)$$

para todo $r > 0$ y cada $(x, y) \in X \times Y$. En general estas funciones no son cerradas. Por ejemplo, el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ y } y = \frac{1}{x}\}$ es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^2 cuya proyección a la primera coordenada es el conjunto $(0, \infty)$, que no es cerrado. Otro ejemplo de una función abierta que en general no es cerrada es la inclusión canónica $i_Y: Y \rightarrow X$, de un subconjunto abierto Y de X en X . En cambio, si Y es cerrado, entonces i_Y es una función cerrada, que en general no es abierta.

Observación 3.24. Para cada función biyectiva $f: X \rightarrow X'$ son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es continua y abierta.
3. f es continua y cerrada.

Esto es claro porque, por el Teorema 3.5, una función biyectiva f es abierta si y solo si es cerrada, y esto ocurre si y solo si f^{-1} es continua.

Ejemplo 3.25. Todos los intervalos abiertos no vacíos de \mathbb{R} son homeomorfos. Más precisamente, la función $f_1: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, definida por

$$f_1(x) := \frac{x}{1 + |x|},$$

es un homeomorfismo con inversa $f_1^{-1}(y) := \frac{y}{1 - |y|}$. Para cada intervalo acotado (a, b) , también es un homeomorfismo la función $f_2: (-1, 1) \rightarrow (a, b)$, definida por

$$f_2(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2},$$

y para cada $a \in \mathbb{R}$ lo son las funciones $f_3: (-\infty, a) \rightarrow (-a, \infty)$ y $f_4: (-\infty, 1) \rightarrow (-\infty, a)$, dadas por

$$f_3(x) = -x \quad \text{y} \quad f_4(x) := x + a - 1.$$

Por último, la función $f_5: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1)$, definida por

$$f_5(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{1+x} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

es un homeomorfismo. En efecto, las funciones f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 son continuas por el Ejercicio 4 y la Proposición 3.11. Además, un cálculo directo muestra que son inversibles, y que sus inversas $f_1^{-1}, \dots, f_5^{-1}$ satisfacen

$$\begin{aligned} f_1^{-1}(y) &= \frac{y}{1-|y|}, & f_2^{-1}(y) &= \frac{2}{b-a}y - \frac{b+a}{b-a}, \\ f_3^{-1}(y) &= y^{-1}, & f_4^{-1}(y) &= y - a + 1 \end{aligned}$$

y

$$f_5^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \leq 0, \\ \frac{x}{1-y} & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Como, nuevamente por el Ejercicio 4 y la Proposición 3.11, estas funciones son continuas, las funciones f_1, f_2, f_3, f_4 y f_5 son homeomorfismos.

Ejercicios

- Pruebe que para cada función $f: X \rightarrow Y$, cada punto $x \in X$ y cada subbase de entornos \mathcal{S} de $f(x)$ son equivalentes:
 - $f: X \rightarrow Y$ es continua en x .
 - Para todo $U \in \mathcal{S}$ hay un entorno abierto V de x tal que $f(V) \subseteq U$.
 - $f^{-1}(U)$ es un entorno de x , para cada $U \in \mathcal{S}$.
- Fijemos una subbase \mathcal{S} de Y . Pruebe que para cada función $f: X \rightarrow Y$ son equivalentes:
 - $f: X \rightarrow Y$ es continua.
 - $f^{-1}(U)$ es abierto en X para cada $U \in \mathcal{S}$.
- Recordemos que \mathbb{N}_S^* es el conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ provisto de la métrica d_S dada por

$$d^S(m, n) := \begin{cases} |m^{-1} - n^{-1}| & \text{si } m, n \in \mathbb{N}, \\ |m^{-1}| & \text{si } n = \infty \end{cases}$$

(Vease el séptimo ítem en los Ejemplos 1.3). Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de un espacio métrico X y un elemento $x \in X$, consideremos la función $x^*: \mathbb{N}_S^* \rightarrow X$ definida por

$$x^*(n) := \begin{cases} x_n & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ x & \text{si } n = \infty. \end{cases}$$

Pruebe que son equivalentes:

- La sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a x .
 - La función x^* es continua.
 - La función x^* es continua en x .
- Pruebe que las funciones

$$\begin{array}{ccc} k \times k & \xrightarrow{+} & k \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} k \times k & \xrightarrow{\text{m}} & k \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} k \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inv}} & k \setminus \{0\} \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

donde $k := \mathbb{R}$ o \mathbb{C} , son continuas. Concluya que la suma, el producto y el cociente de funciones continuas $f: X \rightarrow k$ y $g: X \rightarrow k$, son funciones continuas (por supuesto, el dominio del cociente de f por g es $X \setminus g^{-1}(0)$).

Nota 3.26. Como la función identidad $\text{id}: k \rightarrow k$ y las funciones constantes $c_a: k \rightarrow k$ ($a \in k$) son continuas, una consecuencia directa de este ejercicio es que las funciones racionales $\frac{P}{Q}: A \rightarrow k$, donde P y Q son polinomios con coeficientes en k y $A = k \setminus Q^{-1}(0)$, son continuas.

5. Pruebe que la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) := \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 + 2 & \text{si } x \geq y \\ \frac{(x-y)^3 - 3(x-y)^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2}{x^2 + y^2 + 1} & \text{si } x \leq y \end{cases}$$

es continua.

6. Encuentre funciones $f_j: X_j \rightarrow Y_j$ ($i = 1, \dots, 8$) entre espacios métricos, tales que:

- f_1 no es ni continua, ni abierta, ni cerrada,
- f_2 es continua, pero no es abierta ni cerrada,
- f_3 es abierta, pero no es continua ni cerrada,
- f_4 es cerrada, pero no es continua ni abierta,
- f_5 es continua y abierta, pero no es cerrada,
- f_6 es continua y cerrada, pero no es abierta,
- f_7 es abierta y cerrada, pero no es continua,
- f_8 es continua, abierta y cerrada.

7. Pueba que en todo espacio prehilbertiano el producto interno es una función continua.

3.2. Funciones uniformemente continuas

Definición 3.27. Decimos que una función $f: X \rightarrow Y$ es *uniformemente continua* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, x' \in X$,

$$d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Decimos que f es *uniformemente continua sobre un subconjunto A de X* si su restricción a A es uniformemente continua.

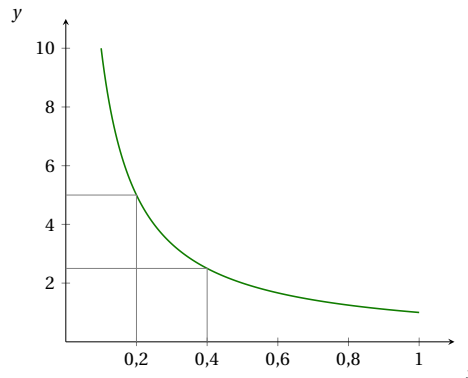
La diferencia entre las definiciones de continuidad y de continuidad uniforme, es que en la primera δ puede variar con el punto del dominio en el que se está evaluando la continuidad, no exigiéndose que se haya uno que sirva para todos, mientras que en la segunda esto se pide explícitamente.

Observación 3.28. Consideremos una función $f: X \rightarrow Y$ y un subconjunto A de X . Si f es uniformemente continua sobre A , entonces $f|_A$ es continua. En particular toda función uniformemente continua es continua.

Observación 3.29. Hay funciones que son continuas y no son uniformemente continuas. Una es la función $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \frac{1}{x}$. Es continua porque es cociente de dos funciones continuas (Ver el Ejercicio 4 de la Sección 3.1). Pero no es uniformemente continua porque para todo $\delta \in (0, 1)$,

$$|f(\delta) - f(\delta/2)| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta/2} \right| = \frac{\delta/2}{\delta^2/2} = \frac{1}{\delta} > 1 \text{ (Ver la Figura 3.1).}$$

Ejemplo 3.30. Para cada subconjunto A de X , la inclusión canónica $i_A: A \rightarrow X$ es uniformemente continua. En particular la función identidad $\text{id}: X \rightarrow X$ es uniformemente continua.

Figura 3.1: Observación 3.29 con $\delta = 0,4$

Ejemplo 3.31. La función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) := \sqrt{x}$, es uniformemente continua. En efecto, en los cursos de cálculo en una variable se prueba que esta función es continua (más adelante deduciremos esto del hecho de que la función $x \mapsto x^2$ es continua), y en el Capítulo 6 veremos que toda función continua cuyo dominio es un intervalo cerrado de \mathbb{R} , es uniformemente continua.

Proposición 3.32. Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son funciones uniformemente continuas, entonces $g \circ f$ es uniformemente continua.

Demostración. Puesto que g es uniformemente continua, sabemos que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y, y' \in Y$,

$$d(g(y), g(y')) < \epsilon \quad \text{siempre que } d(y, y') < \delta.$$

Como también f es uniformemente continua, existe $\delta' > 0$ tal que para todo $x, x' \in X$,

$$d(f(x), f(x')) < \delta \quad \text{siempre que } d(x, x') < \delta'.$$

Combinando ambos hechos obtenemos que

$$d(g \circ f(x), g \circ f(x')) < \epsilon \quad \text{siempre que } d(x, x') < \delta',$$

lo que termina la demostración. □

Proposición 3.33. Una función $f: Z \rightarrow X \times Y$ es uniformemente continua si y solo si lo son las funciones coordenadas f_X y f_Y .

Demostración. Como

$$d_\infty(f(z), f(z')) = \max(d(f_X(z), f_X(z')), d(f_Y(z), f_Y(z'))),$$

son equivalentes:

- Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(z, z') < \delta \Rightarrow d(f_X(z), f_X(z')) < \epsilon \text{ y } d(f_Y(z), f_Y(z')) < \epsilon \quad \text{para todo } z, z' \in Z.$$

- Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(z, z') < \delta \Rightarrow d_\infty(f(z), f(z')) < \epsilon \quad \text{para todo } z, z' \in Z.$$

Esto prueba que la afirmación es verdadera, porque el primer item se satisface si y solo si f_X y f_Y son uniformemente continuas, y el segundo dice que f es uniformemente continua. \square

Corolario 3.34. Una función $f: Z \rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ es uniformemente continua si y solo si las funciones coordenadas f_{X_j} ($j \in \{1, \dots, n\}$) son uniformemente continuas.

Demostración. Esto se sigue inmediatamente de la Proposición 3.33 por inducción en n . \square

Corolario 3.35. La proyección canónica $p_j: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow X_j$ es uniformemente continua para cada j .

Demostración. Esto es consecuencia Corolario 3.34 porque la función identidad de $X_1 \times \dots \times X_n$ es uniformemente continua. \square

Corolario 3.36. Para cada familia finita $f_j: X_j \rightarrow Y_j$ ($1 \leq j \leq n$), de funciones uniformemente continuas, la función

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_n & \xrightarrow{f_1 \times \dots \times f_n} & Y_1 \times \dots \times Y_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \end{array}$$

es uniformemente continua.

Demostración. Basta observar que $p_j \circ (f_1 \times \dots \times f_n) = f_j \circ p_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, y que las funciones $f_j \circ p_j$ son uniformemente continuas porque son composición de funciones uniformemente continuas. \square

Proposición 3.37. Consideremos una función $f: X \rightarrow Y$, y escribamos X como unión $X = A_1 \cup A_2$ de dos subconjuntos. Supongamos que existe $\gamma > 0$ con la siguiente propiedad: para cada par a, a' de elementos de X tales que

$$a \in A_1 \setminus A_2, \quad a' \in A_2 \setminus A_1 \quad \text{y} \quad d(a, a') < \gamma,$$

existe $a'' \in A_1 \cap A_2$ con $\max(d(a, a''), d(a', a'')) \leq d(a, a')$. Si $f|_{A_1}$ y $f|_{A_2}$ son uniformemente continuas, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $a, a' \in A_1$ o $a, a' \in A_2$, entonces $d(f(a), f(a')) < \epsilon/2 < \epsilon$. Es evidente que podemos tomar $\delta < \gamma$. Si lo hacemos, entonces por hipótesis para cada $a \in A_1$ y $a' \in A_2$ existe $a'' \in A_1 \cap A_2$ tal que

$$d(f(a), f(a')) \leq d(f(a), f(a'')) + d(f(a''), f(a')) < 2 \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

lo que termina la prueba. \square

Ejemplo 3.38. La función $f: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) := \sqrt{x}$, es uniformemente continua. En efecto, en el Ejemplo 3.31 vimos que f es uniformemente continua sobre $[0, 1]$, y usando la desigualdad

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \left| \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right| \leq \frac{1}{2} |a - b|,$$

valida para todo $a, b \geq 1$, se comprueba fácilmente que f es uniformemente continua sobre $[1, \infty]$. Dado que las hipótesis de la Proposición 3.37 se satisfacen (como γ puede tomarse cualquier número real positivo), f es uniformemente continua, como afirmamos.

Corolario 3.39. Consideremos una función $f: X \rightarrow Y$, y escribamos X como unión $X = A_1 \cup A_2$ de dos subconjuntos. Si $d(A_1 \setminus A_2, A_2 \setminus A_1) > 0$ y $f|_{A_1}$ y $f|_{A_2}$ son uniformemente continuas, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Si tomamos $\gamma = d(A_1 \setminus A_2, A_2 \setminus A_1) > 0$, entonces las hipótesis de la proposición se satisfacen trivialmente, porque no hay ningún $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$ a distancia menor que γ . \square

Definición 3.40. Una función $f: X \rightarrow Y$ es un *isomorfismo uniforme* si es biyectiva, uniformemente continua, y su inversa es uniformemente continua. Dos espacios métricos X e Y son *uniformemente equivalentes* si existe un isomorfismo uniforme de X en Y . En ese caso escribimos $X \simeq_u Y$.

Observación 3.41. Los argumentos usados para probar que la relación \simeq es reflexiva simétrica y transitiva, prueban que \simeq_u también lo es.

Definición 3.42. Una propiedad de espacios métricos es una *propiedad uniforme* si cada vez que un espacio métrico X la tiene, la tienen también todos los que son uniformemente isomorfos a X .

Observación 3.43. Por supuesto, las propiedades topológicas son propiedades uniformes. Pero hay muchas propiedades uniformes que no son topológicas. No damos ningún ejemplo ahora, porque todavía no hemos introducidos ninguna, pero más adelante veremos varias (como la completitud y la acotación total).

3.3. Funciones de Lipschitz

Definición 3.44. Una función $f: X \rightarrow Y$ es una *función de Lipschitz* si existe una constante $K \geq 0$ tal que $d(f(x), f(x')) \leq Kd(x, x')$ para todo $x, x' \in X$. El mínimo K que satisface esta condición es la *constante de Lipschitz de f* . Una función de Lipschitz es una *función corta* o una *función no expansiva* si tiene constante de Lipschitz menor o igual que 1, y es una *contracción* si su constante de Lipschitz es menor que 1.

Proposición 3.45. Toda función de Lipschitz es uniformemente continua.

Demostración. Supongamos que $f: X \rightarrow Y$ es de Lipschitz con constante de Lipschitz K . Entonces dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta := \frac{\epsilon}{K}$, para conseguir que

$$d(f(x), f(x')) \leq Kd(x, x') < K\delta = \epsilon \quad \text{para todo } x, x' \in X \text{ con } d(x, x') < \delta.$$

Esto prueba que f es uniformemente continua, como afirmamos. \square

Observación 3.46. Hay funciones uniformemente continuas que no son funciones de Lipschitz. Una es la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) := \sqrt{x}$, que consideramos en el Ejemplo 3.31. Esta no es de Lipschitz, porque

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} |a - b|,$$

y $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ toma valores arbitrariamente grandes en el intervalo $[0, 1]$.

Ejemplo 3.47. Para cada subconjunto A de X , la inclusión canónica $i_A: A \rightarrow X$ es una función corta.

Ejemplo 3.48. Las proyecciones canónicas $p_X: X \times Y \rightarrow X$ y $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$, de un producto $X \times Y$ de espacios métricos en cada una de sus coordenadas, son funciones cortas porque

$$d_\infty((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), d(y, y')) \geq d(x, x')$$

y

$$d_\infty((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), d(y, y')) \geq d(y, y'),$$

para cada par (x, y) y (x', y') de puntos de $X \times Y$.

Ejemplo 3.49. Para todo espacio métrico X la función distancia $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función de Lipschitz, porque, por las propiedades triangular y simétrica de d y el item 2 de la Proposición 1.2,

$$\begin{aligned} \|d(x, x') - d(y, y')\| &\leq \|d(x, x') - d(x, y')\| + \|d(x, y') - d(y, y')\| \\ &\leq d(x, y) + d(x', y') \\ &\leq 2 \max(d(x, y), d(x', y')) \\ &= 2d_\infty((x, x'), (y, y')) \end{aligned}$$

para todo $x, x', y, y' \in X$.

Nota 3.50. La cuenta hecha en el ejemplo anterior muestra que 2 es una cota superior de la constante de Lipschitz de d . Para \mathbb{R} esta constante es 2, como puede comprobarse tomando $x = 0$, $x' = 2$ e $y = y' = 1$. Por supuesto, el hecho de que la máxima constante de Lipschitz para las funciones distancia sea 2 se debe a que estamos considerando a $X \times X$ provisto de la distancia d_∞ . Si lo consideramos provisto con la distancia d_1 dada por $d_1((x, x'), (y, y')) := d(x, y) + d(x', y')$ (pruebe que d_1 es una función distancia o vea la Observación ??), entonces d es una función corta, porque

$$\|d(x, x') - d(y, y')\| \leq \|d(x, x') - d(x, y')\| + \|d(x, y') - d(y, y')\| \leq d(x, y) + d(x', y') = d_1((x, x'), (y, y')).$$

Ejemplo 3.51. Para cada subconjunto A de X , la función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) := d(x, A)$, es una función corta porque

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X,$$

por la Proposición 1.56.

Proposición 3.52. Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son funciones de Lipschitz, entonces $g \circ f$ es de Lipschitz.

Demostración. Denotemos con K_f y K_g a las constantes de Lipschitz de f y g , respectivamente. Como

$$d(g \circ f(x), g \circ f(x')) \leq K_g d(f(x), f(x')) \leq K_g K_f d(x, x')$$

para cada par x, x' de puntos de X , la función $g \circ f$ es de Lipschitz, con constante de Lipschitz menor o igual que $K_g K_f$. \square

Proposición 3.53. Una función $f: Z \rightarrow X \times Y$ es de Lipschitz si y solo si lo son sus funciones coordenada f_X y f_Y . Además, la constante de Lipschitz K_f , de f , es el máximo de las constantes de Lipschitz K_{f_X} , de f_X , y K_{f_Y} , de f_Y .

Demostración. Como

$$d_\infty(f(z), f(z')) = \max(d(f_X(z), f_X(z')), d(f_Y(z), f_Y(z'))),$$

para cada $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ son equivalentes:

$$d(f_X(z), f_X(z')) \leq Kd(z, z') \quad \text{y} \quad d(f_Y(z), f_Y(z')) \leq Kd(z, z') \quad \text{para todo } z, z' \in Z,$$

y

$$d_\infty(f(z), f(z')) \leq Kd(z, z') < \delta \quad \text{para todo } z, z' \in Z.$$

Esto prueba que la afirmación es verdadera. \square

Corolario 3.54. Una función $f: Z \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$ es de Lipschitz si y solo si las funciones coordenadas f_{X_1}, \dots, f_{X_n} son de Lipschitz. Además, la constante de Lipschitz de f es el máximo de las constantes de Lipschitz de las f_{X_j} .

Demostración. Esto se sigue de la Proposición 3.53 por inducción en n . \square

Corolario 3.55. Para cada familia finita $f_j: X_j \rightarrow Y_j$ ($1 \leq j \leq n$) de funciones de Lipschitz, la función

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \cdots \times X_n & \xrightarrow{f_1 \times \cdots \times f_n} & Y_1 \times \cdots \times Y_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \end{array}$$

es de Lipschitz.

Demostración. Basta observar que $p_j \circ (f_1 \times \cdots \times f_n) = f_j \circ p_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, y que las funciones $f_j \circ p_j$ son de Lipschitz porque son composición de funciones de Lipschitz. \square

Proposición 3.56. Consideremos una función de Lipschitz $f: X \rightarrow Y$. La imagen por f de cada conjunto acotado A de X , es un conjunto acotado de Y .

Demostración. Denotemos con K a la constante de Lipschitz de f . Como

$$d(f(x), f(x')) \leq Kd(x, x') \quad \text{para todo } x, x' \in X,$$

si A tiene diámetro M , entonces $f(A)$ tiene diámetro menor o igual que KM . \square

Observación 3.57. Para que valga el resultado anterior no basta que f sea uniformemente continua. Por ejemplo, si X es un espacio métrico no acotado, entonces la función identidad $\text{id}: X_d \rightarrow X$, donde X_d es el conjunto subyacente de X dotado con la métrica discreta, es uniformemente continua y aplica su dominio (que es un conjunto acotado) sobre su codominio (que no lo es). Es más, cuando X es \mathbb{N} (con la distancia usual), f es un isomorfismo uniforme.

Definición 3.58. Una función $f: X \rightarrow Y$ es un *isomorfismo de Lipschitz* si es biyectiva, de Lipschitz, y su inversa es de Lipschitz. Dos espacios métricos X e Y son *isomorfos en el sentido de Lipschitz* si hay un isomorfismo de Lipschitz $f: X \rightarrow Y$. En ese caso escribimos $X \simeq_{\text{Lips}} Y$.

Observación 3.59. Tal como ocurre con las relaciones \simeq y \simeq_u , la relación \simeq_{Lips} es reflexiva simétrica y transitiva y esto puede probarse usando los mismos argumentos.

Definición 3.60. Una propiedad de un espacio métrico es una *propiedad de Lipschitz* si cada vez que un espacio la tiene, la tienen también todos los que son isomorfos a él en el sentido de Lipschitz.

Observación 3.61. Es claro que las propiedades uniformes son propiedades de Lipschitz. Una propiedad de Lipschitz que no es uniforme, es la de ser un espacio métrico acotado.

Proposición 3.62. Para cada espacio normado E , las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. La función $E \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función corta.
2. La función $E \times E \xrightarrow{+} E$ es de Lipschitz.
3. La función $k \times E \xrightarrow{\cdot} E$ es continua. Además, su restricción a $B_r(0) \times B_r(0)$ es de Lipschitz, para todo $r > 0$.
4. Si $\lambda \in k \setminus \{0\}$ y $a \in E$, entonces la función $\psi_\lambda: E \rightarrow E$, definida por $\psi_{\lambda,a}(x) := a + \lambda \cdot x$, es un isomorfismo de Lipschitz.

Demostración. El primer ítem es verdadero, porque, por el ítem 2 de la Proposición 1.2,

$$\| \|x\| - \|x'\| \| = |d(x, 0) - d(x', 0)| \leq d(x, x') = \|x - x'\|$$

para todo $x, x' \in E$. El segundo lo es, porque, por la propiedad triangular de $\|\cdot\|$ y la definición de $\|\cdot\|_\infty$,

$$\|(x_1 + x_2) - (x'_1 + x'_2)\| \leq \|x_1 - x'_1\| + \|x_2 - x'_2\| \leq 2\|(x_1, x_2) - (x'_1, x'_2)\|_\infty.$$

para todo $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in E$. El tercero lo es, porque, como la función $\|\cdot\|$ es homogénea y tiene la propiedad triangular,

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot x - \lambda' \cdot x'\| &= \|\lambda(x - x') + (\lambda - \lambda')x'\| \\ &\leq |\lambda| \|x - x'\| + |\lambda - \lambda'| \|x'\| \\ &\leq r(|\lambda - \lambda'| + \|x - x'\|) \\ &\leq 2r \|(\lambda, x) - (\lambda', x')\|_\infty \end{aligned}$$

para cada $\lambda, \lambda' \in B_r^k(0)$ y cada $x, x' \in B_r^E(0)$. Por último, para probar que lo es el cuarto es suficiente notar que $\psi_{\lambda,a}$ es de Lipschitz porque es composición de las funciones continuas de Lipschitz $x \mapsto \lambda \cdot x$ y $x \mapsto a + x$, que es inversible y que su inversa es una función del mismo tipo. \square

Ejercicios

1. Pruebe que para todo espacio con producto interno E y cada subconjunto acotado X de $E \times E$, la restricción del producto interno de E a X es una función de Lipschitz. Pruebe también que para cada $x \in E$ las funciones $y \mapsto \langle x, y \rangle$ y $y \mapsto \langle y, x \rangle$, de E en k , son de Lipschitz.

3.4. Isometrías

Definición 3.63. Decimos que una función $f: X \rightarrow Y$ es una *isometría* si $d(x, x') = d(f(x), f(x'))$ para todo $x, x' \in X$.

Ejemplo 3.64. Para cada subconjunto A de un espacio métrico X , la inclusión canónica de A en X es una isometría, si (como es usual) se piensa a A con la métrica inducida por la de X . Más generalmente, $f: (Y, d_f) \rightarrow X$ (donde d^f es la distancia presentada en el Ejemplo 1.3(7)) es una isometría para cada función inyectiva $f: Y \rightarrow X$.

Observación 3.65. Las isometrías son funciones cortas, pero en realidad la definición de isometría es mucho más fuerte, porque donde en la de función corta se pide que valga una desigualdad, en la de isometría se pide que valga una igualdad.

Ejemplo 3.66. Para cada elemento v de un espacio normado E , la traslación $T_v: E \rightarrow E$, definida por $T_v(x) := x + v$, es una isometría biyectiva, con inversa T_{-v} , porque

$$\|T_v(x) - T_v(y)\| = \|(x + v) - (y + v)\| = \|x - y\| \quad \text{para todo } x, y \in E.$$

Ejemplos 3.67. Las reflexiones ortogonales respecto de rectas son isometrías biyectivas del plano euclideo. También lo son las rotaciones (en el sentido contrario de las agujas del reloj) de un ángulo fijo alrededor de un punto. Dejamos como ejercicio para el lector probar estas afirmaciones.

Ejemplo 3.68. Las igualdades

$$\frac{1}{2} \|(x + y, x - y)\|_1 = \frac{1}{2} (|x + y| + |x - y|) = \max(|x|, |y|) = \|(x, y)\|_\infty,$$

muestran que la función $(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$ es una isometría biyectiva de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

Observación 3.69. Las isometrías son funciones inyectivas. En efecto, si $f: X \rightarrow Y$ es una isometría, entonces

$$f(x) = f(x') \Rightarrow d(f(x), f(x')) = 0 \Rightarrow d(x, x') = 0 \Rightarrow x = x'.$$

Por supuesto, esto no es verdad para espacios pseudométricos.

Proposición 3.70. Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son isometrías, entonces $g \circ f$ es una isometría.

Demostración. Porque

$$d(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d(f(x), f(x')) = d(x, x')$$

para todo $x, x' \in X$. □

Observación 3.71. Si $f: X \rightarrow Y$ es una isometría, entonces

$$f(B_r(x)) = f(X) \cap B_r(f(x)) \quad \text{y} \quad f(B_r[x]) = f(X) \cap B_r[f(x)],$$

para todo $x \in X$ y $r > 0$.

Definición 3.72. Una isometría $f: X \rightarrow Y$ es un *isomorfismo isométrico* si es biyectiva. Si este es este caso, entonces su inversa es una isometría automáticamente. Dos espacios métricos X e Y son *isométricamente isomorfos* o *isométricos* si hay una isometría biyectiva $f: X \rightarrow Y$. Si X e Y son isométricos escribimos $X \simeq_{\text{Metr}} Y$.

Observación 3.73. Tal como ocurre con las relaciones \simeq , \simeq_u y \simeq_{Lips} , la relación \simeq_{Metr} es reflexiva simétrica y transitiva.

Definición 3.74. Una propiedad de un espacio métrico es una *propiedad métrica* si cada vez que un espacio la tiene, la tienen también todos los que son isométricos a él.

Observación 3.75. Es evidente que las propiedades de Lipschitz son propiedades métricas. Una propiedad métrica que no es de Lipschitz es, por ejemplo, la de tener diámetro 1.

Ejercicios

1. Use el ejemplo 3.66 para dar otra prueba de la Proposición 1.41.
2. Pruebe que fijada una recta L en el plano euclideo, cada punto $x \in \mathbb{R}^2$ se escribe de manera única en la forma $x = u + a$, con $u \in L$ y a ortogonal a L .
3. Pruebe que para cada recta L del plano euclideo, la reflexión S_L respecto de L es una isometría biyectiva.
4. Pruebe que para cada punto x_0 y cada ángulo θ , la rotación de ángulo θ alrededor de $x_0 \in \mathbb{R}^2$, en el sentido contrario de las agujas del reloj, es una isometría biyectiva.
5. Pruebe, mediante un ejemplo, que existen espacios métricos X con isometrías no sobreyectivas $f: X \rightarrow X$.
6. Pruebe que las afirmaciones hechas en las Observaciones 3.71 y 3.73 son verdaderas.

3.5. Métricas Equivalentes

Definición 3.76. Decimos que dos métricas d^1 y d^2 de un conjunto X son *topológicamente equivalentes* y escribimos $d^1 \sim d^2$ si la función identidad $\text{id}: (X, d^1) \rightarrow (X, d^2)$ es un homeomorfismo, y que d^1 y d^2 son *uniformemente equivalentes*, si la función $\text{id}: (X, d^1) \rightarrow (X, d^2)$ es un isomorfismo uniforme. Señalamos este hecho escribiendo $d^1 \stackrel{u}{\sim} d^2$.

Observación 3.77. Las relaciones \sim y $\stackrel{u}{\sim}$ son relaciones de equivalencia. En efecto, como $\text{id}: (X, d) \rightarrow (X, d)$ es un isomorfismo uniforme para cada espacio métrico, \sim y $\stackrel{u}{\sim}$ son reflexivas. Dado que si $\text{id}: (X, d^1) \rightarrow (X, d^2)$ es un homeomorfismo, entonces $\text{id}: (X, d^2) \rightarrow (X, d^1)$ también lo es, y dado que lo mismo vale para isomorfismos uniformes, \sim y $\stackrel{u}{\sim}$ son simétricas. Por último, como los homeomorfismos y los isomorfismos uniformes son cerrados por composición, \sim y $\stackrel{u}{\sim}$ son transitivas.

Proposición 3.78. Para cada par d^1 y d^2 de métricas definidas sobre un conjunto X , son equivalentes

1. d^1 y d^2 son topológicamente equivalentes.
2. (X, d^1) y (X, d^2) tienen los mismos abiertos.
3. (X, d^1) y (X, d^2) tienen los mismos cerrados.
4. Para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^{d^1}(x) \subseteq B_\epsilon^{d^2}(x)$ y $B_\delta^{d^2}(x) \subseteq B_\epsilon^{d^1}(x)$.
5. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tiende a $x \in X$ en (X, d^1) si y solo si tiende a x en (X, d^2) .

Demostración. 1. \Leftrightarrow 2. Por la equivalencia entre los items 1 y 2 del Teorema 3.5.

2. \Leftrightarrow 3. Porque un conjunto es cerrado si y solo si es el complemento de un abierto.

2. \Rightarrow 4. Por el item 2 y la Observación 2.11, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$B_{\delta_1}^{d^1}(x) \subseteq B_\epsilon^{d^2}(x) \quad \text{y} \quad B_{\delta_2}^{d^2}(x) \subseteq B_\epsilon^{d^1}(x).$$

Entonces $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ satisface las condiciones pedidas en el item 4.

4. \Rightarrow 2. Por definición, un subconjunto U de X es un abierto de (X, d^2) si para todo $x \in U$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}^{d^2}(x) \subseteq U$. Por el item 4, esto implica que para cada $x \in U$ existe $\delta_x > 0$ tal que $B_{\delta_x}^{d^1}(x) \subseteq U$. En otras palabras, que U es un abierto de (X, d^1) .

1. \Leftrightarrow 5. Por la equivalencia entre los items 1 y 4 de la Proposición 3.4. □

Ejercicios

1. Pruebe que dos métricas d^1 y d^2 de un conjunto X son uniformemente equivalentes si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta^{d^1}(x) \subseteq B_\epsilon^{d^2}(x) \quad \text{y} \quad B_\delta^{d^2}(x) \subseteq B_\epsilon^{d^1}(x)$$

para todo $x \in X$.

2. Considerese una familia finita (X_i, d^i) de espacios métricos. Pruebe que una función distancia d definida sobre el producto $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ es equivalente a la distancia d_∞ si y solo si (X, d) tiene la siguiente propiedad: para todo espacio métrico Z una función $f: Z \rightarrow (X, d)$ es continua si y solo si las funciones coordenadas f_{X_i} son continuas. Pruebe también que d es uniformemente equivalente a d_∞ si y solo si (X, d) tiene la siguiente propiedad: para todo espacio métrico Z una función $f: Z \rightarrow (X, d)$ es uniformemente continua si y solo si las funciones coordenadas f_{X_i} son uniformemente continuas.
3. Pruebe que las distancias d_p ($1 \leq p \leq \infty$) de \mathbb{R}^n introducidas en el item 11 del Ejemplo 1.3 son todas uniformemente equivalentes.
4. Pruebe que las distancias d_p ($1 \leq p \leq \infty$) de \mathbb{C}^n , asociadas a las normas definidas en el Ejemplo 1.13, son todas uniformemente equivalentes.

Métricas equivalentes y funciones subaditivas crecientes

Por el Ejercicio 11 de la Sección 1.1 sabemos que si $\alpha: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función subaditiva creciente tal que $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$, entonces la función $\alpha \circ (d^1, \dots, d^n): X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$\alpha \circ (d^1, \dots, d^n)(x, y) := \alpha(d^1(x, y), \dots, d^n(x, y)),$$

es una métrica para todo conjunto X y toda familia finita (d^1, \dots, d^n) de pseudométricas sobre X , que separa puntos. En particular, como vimos en la Observación que sigue al Ejercicio 12 de la misma sección, tomando como α la función

$$\alpha_\infty(v_1, \dots, v_n) := \text{máx}(v_1, \dots, v_n)$$

obtenemos la métrica ∂_∞ dada por

$$\partial_\infty(x, y) := \text{máx}(d^1(x, y), \dots, d^n(x, y)).$$

A continuación establecemos condiciones necesarias y suficientes para que $\alpha \circ (d^1, \dots, d^n)$ sea equivalente a ∂_∞ . Para simplificar los enunciados, en los siguientes tres ejercicios asumimos implícitamente que $\alpha: \mathbb{R}_{\geq 0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función subaditiva creciente tal que $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$. Además consideramos a $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ provisto de la distancia d_∞ y a $\mathbb{R}_{\geq 0}$ provisto de la distancia usual.

5. Pruebe que son equivalentes:
- α es continua.
 - α es continua en 0.
 - La función identidad $\text{id}: (X, \partial_\infty) \rightarrow (X, \alpha \circ (d^1, \dots, d^n))$ es uniformemente continua para todo conjunto X y toda familia finita (d^1, \dots, d^n) de pseudométricas sobre X , que separa puntos.
 - La función identidad $\text{id}: (X, \partial_\infty) \rightarrow (X, \alpha \circ (d^1, \dots, d^n))$ es continua para todo conjunto X y toda familia finita (d^1, \dots, d^n) de pseudométricas sobre X , que separa puntos..

6. Pruebe que son equivalentes:

- a) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(x) < \delta \Rightarrow \|x\|_\infty < \epsilon$.
- b) La función identidad $\text{id}: (X, \alpha \circ (d^1, \dots, d^n)) \rightarrow (X, \mathfrak{d}_\infty)$ es uniformemente continua para todo conjunto X y toda familia finita (d^1, \dots, d^n) de pseudométricas sobre X , que separa puntos.
- c) La función identidad $\text{id}: (X, \alpha \circ (d^1, \dots, d^n)) \rightarrow (X, \mathfrak{d}_\infty)$ es continua para todo conjunto X y toda familia finita (d^1, \dots, d^n) de pseudométricas sobre X , que separa puntos.

7. Pruebe que son equivalentes:

- a) α es continua y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(x) < \delta \Rightarrow \|x\|_\infty < \epsilon$.
- b) α es continua en 0 y para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\alpha(x) < \delta \Rightarrow \|x\|_\infty < \epsilon$.
- c) $(X, \alpha \circ (d^1, \dots, d^n))$ es equivalente a (X, \mathfrak{d}_∞) para todo X y (d^1, \dots, d^n) .
- d) $(X, \alpha \circ (d^1, \dots, d^n))$ es uniformemente equivalente a (X, \mathfrak{d}_∞) para todo X y (d^1, \dots, d^n) .

8. Pruebe que fijadas pseudométricas d^1, \dots, d^n sobre un conjunto X , tales que para cada par de elementos $x \neq y$ de X existe i con $d^i(x, y) \neq 0$, las funciones distancia $\mathfrak{d}_p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ construídas en la Observación que sigue al Ejercicio 12 de la Sección 1.1 son uniformemente equivalentes.

9. Pruebe que fijados espacios métricos $(X_1, d^{X_1}), \dots, (X_n, d^{X_n})$, todas las funciones distancia $d_p: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definidas sobre el producto $X := X_1 \times \dots \times X_n$ en la observación mencionada en el ejercicio anterior son uniformemente equivalentes. Concluya que las distancias d_p ($1 \leq p \leq \infty$) de \mathbb{R}^n , definidas en los items 2 y 11 de los Ejemplos 1.3, son todas uniformemente equivalentes (ver el Ejercicio 3).

ESPACIOS MÉTRICOS SEPARABLES

Definición 4.1. Un subconjunto A de un espacio métrico X es *denso* si $\bar{A} = X$. Por ejemplo, \mathbb{Q} y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en \mathbb{R} . Recordemos que un conjunto A es contable si es finito o numerable. Un espacio métrico es *separable* si tiene un subconjunto contable y denso.

Observación 4.2. Si X tiene un subconjunto denso finito A , entonces $X = A$, porque A es cerrado. Por lo tanto, los subconjuntos densos contables de espacios métricos separables infinitos son necesariamente numerables.

Ejemplo 4.3. Todo espacio métrico contable es separable, y un espacio métrico discreto es separable si y solo si es contable.

Ejemplo 4.4. La recta real \mathbb{R} es separable, porque \mathbb{Q} es numerable y denso en \mathbb{R} .

Ejemplo 4.5. Fijada cualquier familia $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ de funciones acotadas $f_j: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, la función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\ 1 - f_n(x) & \text{si } x = \frac{1}{n}, \end{cases}$$

está a una distancia mayor o igual que 1 de todas las f_j 's. Por lo tanto $B[0, 1]$ no es separable.

Recordemos que una base de X es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, de subconjuntos abiertos de X , tal que

$$U = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ V \subseteq U}} V,$$

para todo abierto U de X , y que esto ocurre si y solo si para cada abierto U de X y cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.

Definición 4.6. Una colección $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es un *cubrimiento* de un subconjunto A de X si $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Un *subcubrimiento* de $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una subfamilia $(U_\lambda)_{\lambda \in \Xi}$ que también cubre A . Un cubrimiento de A es *abierto* si sus miembros son abiertos.

Proposición 4.7. Para cada espacio métrico X son equivalentes:

1. X es separable.
2. X tiene un subconjunto contable S tal que $U \cap S \neq \emptyset$, para todo subconjunto abierto no vacío U de X .
3. X tiene un subconjunto contable S tal que $B_r(x) \cap S \neq \emptyset$, para toda bola abierta $B_r(x)$ de X .
4. X tiene una base contable.
5. Cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento contable (propiedad de Lindeloff).
6. Todo conjunto de abiertos de X disjuntos dos a dos es contable.
7. Todo conjunto de bolas abiertas de X disjuntas dos a dos es contable.
8. Todo subconjunto discreto de X es contable.

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Supongamos que S es un subconjunto contable denso de X y tomemos un abierto no vacío U . Por la Proposición 2.56, como U es entorno de cada uno de sus puntos, $U \cap S \neq \emptyset$.

2. \Rightarrow 3. Porque las bolas abiertas son subconjuntos abiertos no vacíos de X .

3. \Rightarrow 1. Por la Proposición 2.56, la condición 3 dice que $\bar{S} = X$.

1. \Rightarrow 4. Afirmamos que para cada conjunto contable denso $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto

$$\left\{ B_{\frac{1}{m}}(x_n) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base contable de X . Para comprobar que esto es cierto, fijados una bola abierta $B_r(x)$ y un punto $y \in B_r(x)$, tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{2}{m}}(y) \subseteq B_r(x)$ y elijamos $x_n \in B_{\frac{1}{m}}(y)$. Es evidente que entonces $y \in B_{\frac{1}{m}}(x_n) \subseteq B_{\frac{2}{m}}(y) \subseteq B_r(x)$.

4. \Rightarrow 5. Fijemos una base contable $\mathcal{B} := \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X . Dado un cubrimiento abierto $(V_j)_{j \in J}$ de X , consideremos el subconjunto $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \dots\}$ de \mathcal{B} formado por los U_i 's tales que $U_i \subseteq V_j$ para algún j . Para cada n_i , tomemos un V_j tal que $U_{n_i} \subseteq V_j$ y llamemoslo V_{n_i} . Entonces

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_{n_i} \supseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{n_i} = X,$$

donde la última igualdad se sigue de que $V_j = \bigcup \{U_n : U_n \subseteq V_j\}$, para cada $j \in J$.

5. \Rightarrow 3. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$ el cubrimiento abierto $\mathcal{V}_n := (B_{1/n}(x))_{x \in X}$ tiene un subcubrimiento contable $\tilde{\mathcal{V}}_n := (B_{1/n}(x_{m,n}))_{m \in \mathbb{N}}$. Afirmamos que el conjunto contable $A := \{x_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad pedida en el ítem 3. En efecto, dados $x \in X$ y $r > 0$, tomemos un número natural $n \geq 1/r$ y elijamos $x_{m,n}$ tal que $x \in B_{1/n}(x_{m,n})$. Entonces $x_{m,n} \in B_r(x)$. Como r es arbitrario, esto termina la demostración.

4. \Rightarrow 6. Consideremos una base arbitraria \mathcal{B} de X . Si hay un conjunto no contable \mathcal{U} , de abiertos disjuntos dos a dos de X , entonces cada elemento no vacío de \mathcal{U} incluye un elemento de \mathcal{B} . Por lo tanto, \mathcal{B} no puede ser contable.

6. \Rightarrow 7. Porque las bolas abiertas son subconjuntos abiertos de X .

7. \Rightarrow 8. Tomemos un subconjunto discreto D de X y escribamos $r_x := d(x, D \setminus \{x\})$ para cada elemento x de D . Por hipótesis, $r_x > 0$. Afirmamos que los elementos del conjunto

$$\mathcal{U} := \left\{ B_{\frac{r_x}{2}}(x) : x \in D \right\},$$

son disjuntos dos a dos. En efecto, si $B_{\frac{r_x}{2}}(x) \cap B_{\frac{r_{x'}}{2}}(x') \neq \emptyset$, entonces por la propiedad triangular

$$d(x, x') \leq \frac{r_x}{2} + \frac{r_{x'}}{2} \leq \max(r_x, r_{x'}),$$

lo que es absurdo. Esto prueba la afirmación. Entonces \mathcal{U} es contable (por el ítem 8) y, por lo tanto, también lo es \mathcal{D} .

8. \Rightarrow 1. Fijado $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto \mathcal{D}_n , constituido por todos los subconjuntos D de X tales que $d(x, x') \geq \frac{1}{n}$ para todo $x, x' \in D$, dotado con el orden definido por inclusión. Si $\{D_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una cadena de elementos de \mathcal{D}_n , entonces

$$\tilde{D} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$$

pertenece a \mathcal{D}_n , porque dados $x, x' \in \tilde{D}$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x, x' \in D_\lambda$. En consecuencia, por el Lema de Zorn \mathcal{D}_n tiene elementos maximales. Elijamos uno $D(n)$. Notemos que $d(x, D(n)) < \frac{1}{n}$, para todo $x \in X$, debido a que de lo contrario $D(n) \cup \{x\}$ pertenecería a \mathcal{D}_n , lo que contradice la maximalidad de $D(n)$. De esto se sigue inmediatamente que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D(n)$ es denso en X . Además es contable, porque cada uno de los $D(n)$'s lo es. \square

Proposición 4.8. *Si X es un espacio métrico separable, entonces cada subespacio A de X es separable.*

Demostración. Por la Proposición 4.7 sabemos que un espacio es separable si y solo si tiene una base numerable, y por la Observación 2.28 sabemos que si un espacio métrico tiene esta propiedad, entonces también la tienen todos sus subespacios. \square

Proposición 4.9. *Si X es separable y $f : X \rightarrow Y$ es continua y sobreyectiva, entonces Y es separable.*

Demostración. Tomemos un subconjunto numerable denso S de X . Por el Teorema 3.5, dado que f es continua, $Y = f(X) = f(\overline{S}) \subseteq \overline{f(S)}$. Como $f(S)$ es contable, esto prueba que Y es separable. \square

Proposición 4.10. *Un producto de finitos espacios métricos es separable si y solo si cada uno lo es.*

Demostración. Tomemos un producto $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ de finitos espacios métricos, y supongamos que cada X_i tiene un subconjunto contable denso S_i . Entonces, por la Proposición 2.58,

$$\overline{S_1 \times \cdots \times S_n} = \overline{S_1} \times \cdots \times \overline{S_n} = X_1 \times \cdots \times X_n = X.$$

Como el conjunto $S_1 \times \cdots \times S_n$ es contable porque es un producto finito de conjuntos contables, esto prueba que si cada X_i es separable, entonces X también lo es. Recíprocamente, como las proyecciones canónicas $p_j : X \rightarrow X_j$ son funciones continuas, si X es separable, entonces cada X_j lo es, por la Proposición 4.9. \square

Corolario 4.11. \mathbb{R}^n es un espacio métrico separable para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por la Proposición 4.10 para ver que esto es cierto es suficiente recordar que, como vimos en el Ejemplo 4.4, la recta real \mathbb{R} es separable. \square

Recordemos que \aleph_0 es el cardinal del conjunto de los números naturales, y que el cardinal del continuo \mathfrak{c} es el cardinal del conjunto $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, de las funciones de \mathbb{N} en $0, 1$. Así, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Es fácil ver que el cardinal de \mathbb{R} es \mathfrak{c} . Esa es la razón del nombre "cardinal del continuo". El siguiente resultado muestra que un espacio separable no puede tener más elementos que \mathbb{R} .

Teorema 4.12. Si X es un espacio métrico separable, entonces su cardinal $\aleph(X)$ es menor o igual que c .

Demostración. Tomemos una base contable \mathcal{B} de X y formemos una sucesión U_1, U_2, U_3, \dots en la que aparezcan todos sus elementos (en la lista formada por los U_i 's puede haber repeticiones, de hecho, si X es finito necesariamente las hay, pero esto no afecta nuestro argumento). Definimos $\xi: X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ por

$$\xi(x)_i := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U_i, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Consideremos $x, x' \in X$. Por el Corolario 3.16, si $x \neq x'$, entonces existen abiertos disjuntos V y W de X tales que $x \in V$ y $x' \in W$. Como \mathcal{B} es una base, existe U_i tal que $x \in U_i \subseteq V$. En consecuencia $x' \notin U_i$. Así $\xi(x)_i = 1$ y $\xi(x')_i = 0$. Esto muestra que ξ es inyectiva, y termina la demostración. \square

Definición 4.13. Un punto $x \in X$ es un *punto de condensación* de un conjunto $A \subseteq X$, si $B_r(x) \cap A$ no es contable para ningún $r > 0$. Cualquiera sea $A \subseteq X$, denotamos con A^s al conjunto de los puntos de condensación de A .

Observación 4.14. De la definición de punto de condensación se sigue inmediatamente que si $A \subseteq B$, entonces $A^s \subseteq B^s$.

Proposición 4.15. Si X es separable y $A \subseteq X$ no es contable, entonces $A^s \cap A \neq \emptyset$.

Demostración. Fijemos una base contable $\mathcal{B} = \{U_1, U_2, \dots\}$ de A . Si $A \cap A^s = \emptyset$, entonces para cada $x \in A$ existe $U_j \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_j$ y $A \cap U_j$ es contable. Esto implica que $A = \bigcup \{A \cap U_i : \aleph(A \cap U_i) \leq \aleph_0\}$ y, por lo tanto, es contable. \square

El siguiente resultado mejora la proposición anterior.

Proposición 4.16. Si X es un espacio métrico separable y $A \subseteq X$ no es contable, entonces $A \setminus (A^s \cap A)$ es contable.

Demostración. Si $A \setminus (A^s \cap A)$ no fuera contable, entonces, por la Proposición 4.15 y la Observación 4.14,

$$A^s \cap (A \setminus (A^s \cap A)) \supseteq (A \setminus (A^s \cap A))^s \cap (A \setminus (A^s \cap A)) \neq \emptyset,$$

lo que es absurdo. \square

Corolario 4.17. Si X es un espacio métrico separable y no contable, entonces $X \setminus X^s$ es contable.

Demostración. Este es un caso particular de la Proposición 4.16. \square

Proposición 4.18. Si X es separable, entonces el conjunto A^s , de los puntos de condensación de A , es perfecto para cada subconjunto A de X .

Demostración. Debemos probar que A^s es cerrado y sin puntos aislados. Por la definición de clausura, cada bola abierta $B_r(x)$, cuyo centro es un punto x de $\overline{A^s}$, tiene un punto $x' \in A^s$. Como $B_r(x)$ es abierto, incluye a una bola $B_{r'}(x')$, con centro x' . Como esta bola tiene una cantidad no contable de puntos de A , la primera también los tiene. Esto prueba que $x \in A^s$ y, por lo tanto, que A^s es cerrado. Pasando a la otra cuestión, si U es un entorno abierto de un punto x de A^s , entonces $U \cap (A \setminus \{x\})$ es no contable. En consecuencia, por la Proposición 4.15,

$$U \cap (A^s \setminus \{x\}) \supseteq (U \cap (A \setminus \{x\}))^s \cap U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Esto prueba que x es un punto de acumulación de A^s . \square

Ejercicios

1. Pruebe que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es separable exhibiendo un subconjunto numerable denso.
2. Pruebe que si un espacio métrico es una unión contable de subespacios separables, entonces es separable.
3. Pruebe la Proposición 4.9 usando la propiedad de Lindeloff.
4. Pruebe que si X no es separable, entonces A^s es cerrado para cada subconjunto A de X , pero puede tener puntos aislados.

ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS

El criterio de Cauchy es un criterio para la convergencia de sucesiones en \mathbb{R} que no requiere conocer el límite de la sucesión. A diferencia de lo que ocurre en \mathbb{R} , en espacios métricos generales la condición de Cauchy no es suficiente para garantizar la convergencia de una sucesión. Un espacio métrico en el que las sucesiones de Cauchy convergen es llamado completo. Como veremos en capítulos posteriores esta condición es esencial para muchos resultados importantes. En este capítulo primero presentamos la noción de sucesión de Cauchy, luego definimos los espacios métricos completos, damos algunas caracterizaciones de ellos y comenzamos su estudio. En particular probamos que varios ejemplos que ya hemos considerado son espacios completos. Finalmente probamos que cualquier espacio métrico puede sumergirse en forma natural en un espacio métrico completo.

5.1. Sucesiones de Cauchy

Definición 5.1. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de un espacio métrico X es de *Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$.

Proposición 5.2. Toda sucesión convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X es de Cauchy.

Demostración. Escribamos $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Entonces

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon \quad \text{siempre que } n, m \geq n_0,$$

por la propiedad triangular de d . □

Observación 5.3. La recíproca de la proposición anterior es falsa. Por ejemplo, la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y no es convergente (no al menos en ese espacio). En este ejemplo el espacio X puede sumergirse en otro en el que toda sucesión de Cauchy es convergente (se trata del espacio \mathbb{R} , que, como veremos pronto, tiene esta propiedad). Más adelante probaremos que este es un fenómeno general.

Antes de introducir los espacios que vamos a estudiar en este capítulo, veamos que una condición que evidentemente es necesaria para que una sucesión de Cauchy converja, también es suficiente.

Proposición 5.4. *Si una sucesión de puntos de X es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces es convergente.*

Demostración. Supongamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente $(x_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ y escribamos $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{s_n}$. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{s_l}, x) < \epsilon/2 \quad \text{y} \quad d(x_n, x_m) < \epsilon/2 \quad \text{siempre que } l, m, n \geq n_0.$$

Elijamos $l \geq n_0$. Entonces,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{s_l}) + d(x_{s_l}, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

siempre que $n \geq n_0$, puesto que $s_l \geq n_0$. Esto prueba que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente. \square

Observación 5.5. Una función continua puede transformar una sucesión de Cauchy en una que no lo es, aún si es un homeomorfismo. Por ejemplo, la función $\text{inv}: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, definida por $\text{inv}(x) := \frac{1}{x}$, aplica la sucesión $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$, que es de Cauchy, en la sucesión identidad, que no lo es. Pero si $f: X \rightarrow Y$ es uniformemente continua y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de X , entonces $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ lo es también. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) < \epsilon$ siempre que $d(x, x') < \delta$. Para este δ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_l, x_m) < \delta$ para todo $l, m \geq n_0$. Pero entonces $d(f(x_l), f(x_m)) < \epsilon$ para todo $l, m \geq n_0$. En particular, la de ser de Cauchy es una propiedad uniforme que no es topológica.

5.2. Definición de espacio métrico completo y primeros ejemplos

Definición 5.6. Un espacio métrico es *completo* si todas sus sucesiones de Cauchy son convergentes.

Ejemplo 5.7. Todo espacio métrico discreto es completo porque sus sucesiones de Cauchy son finalmente constantes. Por otra parte \mathbb{Q} no es completo. Por ejemplo, toda sucesión de números racionales que tiende a $\sqrt{2}$ es de Cauchy, pero no es convergente en \mathbb{Q} porque $\sqrt{2}$ no es racional.

Observación 5.8. Por la Observación 5.5, si d^1 y d^2 son métricas uniformemente equivalentes de X , entonces (X, d^1) y (X, d^2) tienen las mismas sucesiones de Cauchy. En consecuencia, uno es completo si y solo si el otro lo es.

Lema 5.9. *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de elementos de \mathbb{R} , entonces su imagen es un conjunto acotado.*

Demostración. Puesto que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ si $n \geq n_0$. Por lo tanto

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n : n < n_0\} \cup (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1),$$

lo que termina la prueba. \square

Teorema 5.10. \mathbb{R} es completo.

Demostración. Debemos verificar que en \mathbb{R} toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Por la Proposición 5.4, para ello es suficiente ver que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente o, lo que es igual, un punto de aglomeración. Pero esto es cierto porque, como por el Lema 5.9 el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado, $\limsup_n x_n \in \mathbb{R}$ y, por la Observación 1.91, es un punto de aglomeración de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Proposición 5.11. *Todo subconjunto cerrado C de un espacio métrico completo X es completo.*

Demostración. Como X es completo, toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$. Además, por la Proposición 2.56, sabemos que x es un punto de acumulación de C . Puesto que C es cerrado, de esto se sigue inmediatamente que x pertenece a C . \square

Corolario 5.12. *Los subconjuntos cerrados de \mathbb{R} son espacios métricos completos.*

Demostración. Por las Proposiciones 5.10 y 5.11. \square

El siguiente resultado muestra que la recíproca de la Proposición 5.11 vale aunque el espacio ambiente no sea completo.

Proposición 5.13. *Si C es un subespacio completo de un espacio métrico X , entonces C es un subconjunto cerrado de X .*

Demostración. Fijado $x \in \overline{C}$, tomemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de C que tiende a x . Como es convergente, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Por lo tanto, como C es completo, converge en C . Como su límite no puede ser otro que x , esto implica que $x \in C$. Así que $\overline{C} = C$. \square

Lema 5.14. *Una sucesión $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de puntos de un producto $X_1 \times \cdots \times X_m$ de finitos espacios métricos, es de Cauchy si y solo si la sucesión $(x_{nj})_{n \in \mathbb{N}}$, donde x_{nj} es la j -ésima coordenada de \mathbf{x}_n , es de Cauchy para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.*

Demostración. Esto es cierto porque, por la definición de d_∞ ,

$$d_\infty(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_l) = \max_{1 \leq j \leq m} (d(x_{nj}, x_{lj}))$$

para todo $n, l \in \mathbb{N}$. \square

Proposición 5.15. *Un producto $X_1 \times \cdots \times X_m$, de espacios métricos X_1, \dots, X_m , es completo si y solo si lo es cada X_i .*

Demostración. Escribamos $X := X_1 \times \cdots \times X_m$ y fijemos un punto $x_j \in X_j$ en cada uno de los X_j 's. Para cada i , la función $\iota_i: X_i \rightarrow X$, definida por

$$\iota_i(x) := (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_m),$$

es una isometría con imagen cerrada. En consecuencia, por la Proposición 5.11, si X es completo, entonces lo es cada X_i . Recíprocamente, si cada X_i es completo, entonces X es completo por el Lema 5.14, y porque una sucesión de puntos de X converge si y solo si cada una de sus sucesiones coordenadas converge. En efecto, dada una sucesión de Cauchy de puntos de X , cada una de sus sucesiones coordenadas es de Cauchy y, por lo tanto, convergente. Pero entonces la sucesión original también converge. \square

Corolario 5.16. \mathbb{R}^n es un espacio métrico completo para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Para $n = 0$ esto es claro porque $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, y para $n \geq 1$ se sigue del Teorema 5.10 y la Proposición 5.15. \square

Teorema 5.17. *Para cada espacio métrico X son equivalentes:*

1. X es completo.

2. Para toda cadena decreciente $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$, de bolas cerradas cuyos radios tienden a cero,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset.$$

3. Para toda cadena decreciente $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$, de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(C_n) = 0$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset.$$

4. Para toda cadena decreciente $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$, de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(C_n) = 0$, existe $x \in X$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x\}.$$

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un punto $x_n \in B_n$. Como el radio de B_n tiende a 0 cuando n tiende a infinito, la sucesión x_1, x_2, x_3, \dots es de Cauchy. En consecuencia, como X es un espacio métrico completo, existe $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Es evidente que $x \in \overline{B_n} = B_n$ para todo n . Por lo tanto $x \in \bigcap \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. \Rightarrow 3. Elijamos $n_1 < n_2 < \dots$ tales que $\text{diám}(C_{n_i}) < 1/2^i$, y para cada $i \in \mathbb{N}$ tomemos $x_{n_i} \in C_{n_i}$. Es evidente que $C_{n_{i+1}} \subseteq C_{n_i} \subseteq B_{1/2^i}[x_{n_i}]$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En particular $x_{n_{i+1}} \in B_{1/2^i}[x_{n_i}]$. Por consiguiente

$$d(y, x_{n_i}) \leq d(y, x_{n_{i+1}}) + d(x_{n_{i+1}}, x_{n_i}) \leq 1/2^i + 1/2^i = 1/2^{i-1},$$

para todo $y \in B_{1/2^i}[x_{n_{i+1}}]$, de modo que

$$B_{1/2^i}[x_{n_{i+1}}] \subseteq B_{1/2^{i-1}}[x_{n_i}].$$

En consecuencia, por el ítem 2, existe $x \in \bigcap_i B_{1/2^i}[x_{n_{i+1}}]$. Como

$$d(x_{n_i}, x) \leq \frac{1}{2^{i-1}} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N},$$

la sucesión $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tiende a x , y como

$$x_{n_{i+j}} \in C_i \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N} \text{ y todo } j \geq 0,$$

y estos conjuntos son cerrados, $x \in C_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo que

$$x \in \bigcap \{C_i : i \in \mathbb{N}\},$$

que por lo tanto es no vacío, como queríamos.

3. \Rightarrow 4. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(C_n) = 0$, la intersección de los C_n 's no puede tener más de un punto, pero por el ítem 3 sabemos que por lo menos tiene uno.

4. \Rightarrow 1. Fijemos una sucesión x_1, x_2, x_3, \dots de elementos de X . Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $C_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}$. Si x_1, x_2, x_3, \dots es de Cauchy, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diám}(C_n) = 0$ y, en consecuencia,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x\}.$$

para algún $x \in X$. Afirmamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. En efecto, puesto que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diám}(C_n) < \epsilon$ para todo $n > n_0$, y puesto que x y x_n pertenecen a C_n ; dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (el mismo n_0) tal que

$$d(x, x_n) < \epsilon \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Así que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. □

Definición 5.18. Una función $f: Z \rightarrow X$, de un conjunto Z en un espacio métrico X , es *acotada* si $\text{diám}(f(Z)) < \infty$, es decir si su imagen es un conjunto acotado.

Nota 5.19. Para sucesiones (el caso $Z = \mathbb{N}$) la definición de función acotada fue dada en la Definición 1.80, y para funciones $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado de \mathbb{R} , la supusimos conocida por el lector cuando dimos el tercero de los Ejemplos 1.3 de espacios métricos, y luego la volvimos a usar en varios otros lugares.

Observación 5.20. El conjunto $B(Z, X) := \{f: Z \rightarrow X : f \text{ es acotada}\}$ es un espacio métrico via

$$d_\infty(f, g) := \sup_{z \in Z} d(f(z), g(z))$$

En efecto, es evidente que d_∞ satisface las dos primeras condiciones de la definición de distancia. También satisface la tercera, porque, por la definición de d_∞ y el hecho de que d^X es una función distancia,

$$d^X(f(z), g(z)) = d^X(f(z), h(z)) + d^X(h(z), g(z)) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) \quad \forall f, g, h \in B(Z, X) \text{ y } z \in Z.$$

Siempre consideraremos a $B(Z, X)$ provisto de esta métrica.

Nota 5.21. En el Capítulo 1 escribimos $B[a, b]$ en lugar de $B([a, b], \mathbb{R})$, pero en este y en los que siguen no usaremos esa notación simplificada. Lo mismo ocurrirá con la notación para el espacio de las funciones continuas y acotadas $C[a, b]$, cuando consideremos casos más generales, lo que haremos pronto.

Definición 5.22. Decimos que una sucesión de funciones $f_n \in B(Z, X)$ es *uniformemente de Cauchy* si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $B(Z, X)$ y que *tiende uniformemente* a $f \in B(Z, X)$ si tiende a f en $B(Z, X)$. En este caso también escribimos

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \quad \text{o} \quad f = \lim_{\text{unif}} f_n.$$

Ejemplo 5.23. Los elementos de $B(Z, \mathbb{R})$ son las funciones de Z en \mathbb{R} , que son acotadas en el sentido usual. En cambio, cuando X es (\mathbb{R}, \bar{d}) , donde $\bar{d}(x, y) := \min(1, |x - y|)$, el conjunto $B(Z, X)$ consiste de todas las funciones de Z en \mathbb{R} . Más generalmente, si (X, d) es cualquier espacio métrico y $\bar{d}(x, y) := \min(1, d(x, y))$ (Ver el Ejercicio 2 de la Sección 1.1), entonces $B(Z, (X, \bar{d})) = X^Z$. Además, como

$$\bar{d}_\infty(f, g) = \min(1, d_\infty(f, g)) \quad \text{para cada } f, g \in B(Z, (X, d)),$$

la inclusión canónica

$$i: (B(Z, (X, d), d_\infty) \longrightarrow (B(Z, (X, d), \bar{d}_\infty)$$

es un isomorfismo uniforme de $B(Z, (X, d), d_\infty)$ con su imagen.

Teorema 5.24. Si X es completo, entonces $B(Z, X)$ también lo es.

Demostración. Por la definición de d_∞ , si f_1, f_2, \dots es una sucesión uniformemente de Cauchy de puntos de $B(Z, X)$, entonces $f_1(z), f_2(z), \dots$ es una sucesión de Cauchy en X , y por lo tanto convergente, para cada $z \in Z$. Denotemos con $f: Z \rightarrow X$ a la función definida por

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z).$$

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$. En consecuencia, si $n \geq n_0$, entonces

$$d(f_n(z), f(z)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_n(z), f_m(z)) \leq \epsilon,$$

para todo $z \in Z$. De modo que f_n tiende a f uniformemente. Para ver que f es acotada es suficiente notar que si $d_\infty(f_n(z), f(z)) < 1$ para todo $z \in Z$, entonces

$$d(f(z), f(z')) \leq d(f(z), f_n(z)) + d(f_n(z), f_n(z')) + d(f_n(z'), f(z')) \leq 2 + \text{diám } f_n(Z)$$

para todo $z, z' \in Z$. □

El teorema anterior nos permite dar una prueba alternativa de que \mathbb{R}^n es un espacio métrico completo.

Corolario 5.25. (\mathbb{R}^n, d_∞) , donde d_∞ es la distancia introducida en el ítem 2 de los Ejemplos 1.3, es completo para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Por el Teorema 5.24, como \mathbb{R} es completo, también lo es $(B(\{1, \dots, n\}, \mathbb{R}), d_\infty)$. Para terminar la demostración basta observar que hay un isometría biyectiva evidente entre (\mathbb{R}^n, d_∞) y $(B(\{1, \dots, n\}, \mathbb{R}), d_\infty)$ (esto justifica el uso del mismo símbolo para designar a las funciones distancia de ambos espacios). □

Notación 5.26. Supongamos que Z también es un espacio métrico y denotemos con $C(Z, X)$ al conjunto de las funciones continuas y acotadas de Z en X . Dicho de otro modo,

$$C(Z, X) := \{f \in B(Z, X) : f \text{ es continua}\}.$$

Teorema 5.27. $C(Z, X)$ es un subconjunto cerrado en $B(Z, X)$ y, por lo tanto, es un espacio métrico completo.

Demostración. Debemos probar que si $f \in \overline{C(Z, X)}$, entonces f es continua. Tomemos una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $C(Z, X)$ que tiende uniformemente a f , y fijemos un punto $z_0 \in Z$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_{n_0}, f) < \frac{\epsilon}{3}$. Como f_{n_0} es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z_0)) < \frac{\epsilon}{3}$$

siempre que $z \in B_\delta(z_0)$. Por lo tanto,

$$d(f(z), f(z_0)) \leq d(f(z), f_{n_0}(z)) + d(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z_0)) + d(f_{n_0}(z_0), f(z_0)) < \epsilon$$

para todo $z \in B_\delta(z_0)$. Como z_0 es arbitrario, esto prueba la continuidad de f . □

5.3. Completación

Consideremos espacios métricos X y \tilde{X} . Recordemos que una función $f: X \rightarrow Y$ es uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) < \epsilon$ siempre que $d(x, x') < \delta$.

Teorema 5.28. Supongamos que $A \subseteq X$ es un conjunto denso y $f: A \rightarrow Y$ es una función continua. Los siguientes hechos valen:

1. Si $g: X \rightarrow Y$ y $h: X \rightarrow Y$ son funciones continuas que extienden a f , entonces $g = h$.
2. Si f es uniformemente continua e Y es completo, entonces existe una función uniformemente continua $g: X \rightarrow Y$, que extiende a f . Además, si f es una isometría, entonces g también lo es.

Demostración. 1. Escribamos $C := \{x \in X : g(x) = h(x)\}$. Debemos probar que $C = X$. Como $A \subseteq C$ y $\overline{A} = X$, para ello basta comprobar que C es cerrado, pero esto es una consecuencia inmediata de que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de C y $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, entonces

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = h(x).$$

2. Fijemos un punto $x \in X$ y tomemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A que tiende a x . Como f es uniformemente continua, la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por lo tanto, dado que Y es completo, convergente. Definimos $g(x) = y$, donde $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Debemos probar que esta definición no depende de la sucesión elegida. Supongamos que empezando con otra sucesión $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de puntos de A que tiende a x , obtenemos $y' = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$. Entonces la sucesión $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots$ es convergente y tiene subsucesiones que convergen a y y y' . En consecuencia, $y = y'$. Para concluir la demostración debemos probar que g extiende a f , es uniformemente continua y es una isometría si f lo es. Si $x \in A$, entonces tomando $x_n = x$ para todo n , vemos que

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x),$$

lo que muestra que g extiende a f . Además, como f es uniformemente continua, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(f(x), f(x')) < \epsilon \quad \text{si } x, x' \in A \text{ y } d(x, x') < \delta.$$

Tomemos $x, x' \in X$ tales que $d(x, x') < \delta$ y elijamos sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de puntos de A , tales que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ y $x' = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = d(x, x') < \delta$, por lo que

$$d(g(x), g(x')) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(x'_n)) \leq \epsilon.$$

Esto prueba que g es uniformemente continua. Dejamos como ejercicio para el lector probar que es una isometría si lo es f . □

Definición 5.29. Una *completación* de un espacio métrico X es un espacio métrico completo \tilde{X} , junto con una isometría $i: X \rightarrow \tilde{X}$ tal que $i(X)$ es denso en \tilde{X} .

Por el ítem 1 del Teorema 5.28, la métrica de \tilde{X} está determinada por la de X y por i . Esto también se deduce fácilmente del siguiente resultado.

Teorema 5.30. *Todo espacio métrico tiene una completación. Además, dadas completaciones (\tilde{X}_1, i_1) y (\tilde{X}_2, i_2) de un espacio métrico X , existe una única isometría biyectiva $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_2} & \tilde{X}_2 \\ i_1 \downarrow & \nearrow f & \\ \tilde{X}_1 & & \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Unicidad: Aplicando el Teorema 5.28 a las funciones

$$i_2 \circ i_1^{-1}: i_1(X) \rightarrow \tilde{X}_2 \quad \text{e} \quad i_1 \circ i_2^{-1}: i_2(X) \rightarrow \tilde{X}_1,$$

obtenemos isometrías $f: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ y $g: \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$, respectivamente. Como $i_1(X)$ es denso en \tilde{X}_1 y $g \circ f|_{i_1(X)}: i_1(X) \rightarrow \tilde{X}_1$ es la inclusión, $g \circ f = \text{id}_{\tilde{X}_1}$. Análogamente, $f \circ g = \text{id}_{\tilde{X}_2}$.

Existencia: Fijemos $a \in X$ y consideremos la función $i_a: X \rightarrow B(X, \mathbb{R})$, definida por

$$i_a(x)(y) := d(x, y) - d(a, y).$$

La igualdad $|d(x, y) - d(a, y)| \leq d(x, a)$ muestra que, efectivamente, $i_a(x)$ es acotada. Dado que

$$d_\infty(i_a(x), i_a(x')) = \sup_{y \in X} |i_a(x)(y) - i_a(x')(y)| = \sup_{y \in X} |d(x, y) - d(x', y)| \leq d(x, x')$$

y

$$d_\infty(i_a(x), i_a(x')) \geq |i_a(x)(x) - i_a(x')(x)| = |d(x, x) - d(x', x)| = d(x, x'),$$

la función i_a es una isometría. Es claro ahora que $(\overline{i_a(X)}, i_a)$ es una completación de X . □

Ejercicios

1. Pruebe que la última afirmación en el ítem 2 del Teorema 5.28 es verdadera.

COMPACCIDAD

6.1. Primeras caracterizaciones y propiedades básicas

Recordemos que una colección $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos de un espacio métrico X es un *cubrimiento* de un subconjunto A de X si $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Un *subcubrimiento* de $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una subfamilia $(U_\lambda)_{\lambda \in \Xi}$ que también cubre A . Un cubrimiento de A es *abierto* si sus miembros son abiertos. A pesar de que hemos definido un cubrimiento de A como una familia de subconjuntos de X , a veces diremos que un subconjunto de partes de X es un cubrimiento de A (después de todo un conjunto puede transformarse en una familia simplemente tomando como conjunto de índices el mismo conjunto).

Definición 6.1. Un espacio métrico X es *compacto* si todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento finito. Un subconjunto Y de X es *compacto*, si lo es con la métrica inducida.

Observación 6.2. Por la Proposición 2.20, un subconjunto Y de un espacio métrico X es compacto si y solo si cada familia $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de abiertos de X tal que $Y \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ tiene una subfamilia finita $(U_\lambda)_{\lambda \in \Xi}$ tal que $Y \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Xi} U_\lambda$. Dicho de otro modo, si cada cubrimiento de Y por subconjuntos abiertos de X tiene un subcubrimiento finito.

Proposición 6.3. Para cada espacio métrico X las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. Todo subconjunto compacto C de X es cerrado.
2. Si X es compacto y C es cerrado, entonces C es compacto.

Demostración. 1. Veamos que $X \setminus C$ es abierto. Tomemos $x_0 \in X \setminus C$. Para cada $x \in C$, existen bolas abiertas disjuntas $B_{\epsilon_x}(x_0)$ y $B_{\epsilon_x}(x)$. Como X es compacto existen $x_1, \dots, x_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$. Es evidente que $\bigcap_{i=1}^n B_{\epsilon_{x_i}}(x_0)$ es un entorno de x_0 que no corta a C .

2. Tomemos un cubrimiento $(U_i)_{i \in I}$ de C por abiertos de X . Como X es compacto y C es cerrado, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $X = \left(\bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \right) \cup (X \setminus C)$, por lo que, necesariamente, $C \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$. \square

Observación 6.4. Por las Leyes de Morgan, un espacio métrico X es compacto si y solo si toda colección de cerrados de X con intersección vacía tiene una subcolección finita con intersección

vacía. En efecto, supongamos que X es compacto y tomemos una colección $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, de subconjuntos cerrados de X , con intersección vacía. Entonces, por las Leyes de Morgan,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus C_\lambda) = X \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = X.$$

En consecuencia, como X es compacto y los $X \setminus C_\lambda$ son abiertos, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que

$$(X \setminus C_{\lambda_1}) \cup \dots \cup (X \setminus C_{\lambda_n}) = X$$

y, por lo tanto, nuevamente por las leyes de Morgan, $C_{\lambda_1} \cap \dots \cap C_{\lambda_n} = \emptyset$. El mismo argumento, reemplazando los cerrados por abiertos, las intersecciones por uniones y las uniones por intersecciones, prueba que si toda familia de cerrados de X con intersección vacía tiene una subfamilia finita con intersección vacía, entonces X es compacto.

Definición 6.5. Un subconjunto A de un espacio métrico X es *totalmente acotado* si para todo $\epsilon > 0$ existen $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ y subconjuntos $M_1, \dots, M_{n_\epsilon}$ de X , tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} M_i$ y $\text{diám}(M_i) < \epsilon$ para todo i . Dicho de otro modo, A es totalmente acotado si para todo $\epsilon > 0$ hay una subfamilia finita de subconjuntos de diámetro menor que ϵ de X , que cubre A .

Proposición 6.6. Para cada conjunto A de un espacio métrico X , las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. A es totalmente acotado si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existen finitos puntos $x_1, \dots, x_{m_\epsilon}$ en A tales que

$$\min\{d(x, x_i) : 1 \leq i \leq m_\epsilon\} < \epsilon \quad \text{para todo } x \in A.$$

En otras palabras, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m_\epsilon} B_\epsilon(x_i)$.

2. Si $A \subseteq B \subseteq X$ y B es totalmente acotado, entonces A también lo es.
3. Si A es totalmente acotado, entonces \bar{A} también lo es.
4. Si A es totalmente acotado y $f: X \rightarrow Y$ es uniformemente continua, entonces $f(A)$ es un subconjunto totalmente acotado de Y .
5. Si A es totalmente acotado, entonces A es acotado.
6. Si A no es totalmente acotado, entonces existen $\epsilon > 0$ y una familia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ para todo i, j .

Demostración. Si A es totalmente acotado, entonces tomando un punto x_i en cada M_i (donde los M_i 's son los conjuntos cuya existencia se asegura en la Definición 6.5), obtenemos puntos $x_1, \dots, x_{n_\epsilon}$ tales que cada $x \in X$ dista menos que ϵ de algún x_i . Recíprocamente, si esto es cierto, entonces las bolas $B_\epsilon(x_1), \dots, B_\epsilon(x_{n_\epsilon})$ tienen diámetro menor que 2ϵ y su unión incluye al conjunto A , que por lo tanto es totalmente acotado. Esto prueba que el ítem 1 es verdadero. El ítem 2 lo es porque toda familia de subconjuntos de X que cubre B , cubre A . El ítem 3 vale porque el diámetro de un conjunto es igual al de su adherencia y

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} M_i \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} \bar{M}_i.$$

Veamos que vale el ítem 4. Como f es uniformemente continua, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, x') < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon$. En consecuencia, la imagen por f de cualquier subconjunto de diámetro menor que δ de X es un subconjunto de diámetro menor que ϵ de Y , y, por lo tanto, para cada familia finita (M_1, \dots, M_n) , de subconjuntos de diámetro menor que δ de X , que cubre A ,

la familia $(f(M_1), \dots, f(M_n))$ es un cubrimiento de $f(A)$ mediante conjuntos de diámetro menor que ϵ . El ítem 5 es verdadero por el Ejercicio 8 de la Sección 1.6 y porque A es una unión finita de conjuntos de diámetro menor que 1. Para probar que lo es el ítem 6, notemos que si la condición establecida en el ítem 1 es falsa para algún $\epsilon > 0$, entonces dado un punto arbitrario x_1 de A , existe $x_2 \in A \setminus B_\epsilon(x_1)$, porque $A \not\subseteq B_\epsilon(x_1)$; existe $x_3 \in A \setminus (B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2))$, porque $A \not\subseteq B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2)$, etcétera. La familia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construída de este modo satisface la condición pedida en el enunciado. \square

Proposición 6.7. *Todo espacio métrico totalmente acotado es separable.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio métrico totalmente acotado. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto finito de puntos F_n en X tal que $B_{1/n}(x) \cap F_n \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Es claro que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es denso y numerable. \square

Lema 6.8. *Consideremos un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico totalmente acotado X . Si X no es cubierto por ninguna subcolección finita de $(U_i)_{i \in I}$, entonces para todo $\epsilon > 0$ hay una bola cerrada $B_\epsilon[x]$ que no es cubierta por ninguna subcolección finita de $(U_i)_{i \in I}$.*

Demostración. Como X es totalmente acotado hay puntos $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n B_\epsilon[x_i]$. Si todas estas bolas cerradas fueran cubiertas por subcolecciones finitas de $(U_i)_{i \in I}$, entonces X también lo sería. \square

Teorema 6.9. *Para todo espacio métrico X son equivalentes:*

1. X es compacto.
2. $A' \neq \emptyset$ para todo subconjunto infinito A de X .
3. Toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tiene una subsucesión convergente.
4. X es totalmente acotado y completo.
5. Todo cubrimiento numerable de X tiene un subcubrimiento finito.
6. Toda colección numerable de cerrados de X con intersección vacía tiene una subcolección finita con intersección vacía.

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Supongamos que $A' = \emptyset$ para algún subconjunto infinito A de X . Entonces A es cerrado y cada $x \in A$ es el centro de una bola abierta $B_{\epsilon_x}(x)$ tal que $B_{\epsilon_x}(x) \cap A$ es finito. En consecuencia $\{X \setminus A\} \cup \{B_{\epsilon_x}(x) : x \in A\}$ es un cubrimiento abierto de X que no tiene ningún subcubrimiento finito.

2. \Rightarrow 3. Es claro que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto finito, entonces x_1, x_2, \dots tiene una subsucesión convergente (de hecho, una subsucesión constante). Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, entonces tiene un punto de acumulación x , lo cual nos permite construir una subsucesión $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ que tiende a x , simplemente tomando $x_{n_{i+1}} \in B_{\frac{1}{i+1}}(x) \cap \{x_{n_{i+1}}, x_{n_{i+2}}, \dots\}$.

3. \Rightarrow 4. Por el Teorema 5.4, sabemos que X es completo. Veamos que es totalmente acotado. Si no lo fuera, existirían $\epsilon > 0$ y una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ si $i \neq j$. Es obvio que esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente (alternativamente, como toda sucesión convergente es de Cauchy, podríamos haber deducido que X es totalmente acotado del Ejercicio 4).

4. \Rightarrow 1. Supongamos que X tuviera un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ sin ningún subcubrimiento finito. Por el Lema 6.8 existen bolas cerradas $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$, con $\text{diám}(B_n) < \frac{1}{n}$, ninguna de las cuales es cubierta por una subcolección finita de $\{U_i : i \in I\}$. Por el Teorema 5.17, como X es completo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\}$ para un $x \in X$. Tomemos U_i tal que $x \in U_i$. Es claro que $B_j \subseteq U_i$ para algún j , lo que es absurdo.

1. \Rightarrow 5. Esto es claro.

5. \Rightarrow 2. Supongamos que X tuviera un subconjunto infinito A sin ningún punto de acumulación. Tomemos un subconjunto numerable B de A . Como B no tiene puntos de acumulación, es cerrado y para cada $b \in B$ existe una bola abierta $B_{r_b}(b)$ con centro b tal que $B_{r_b}(b) \cap B = \{b\}$. La colección

$$\{X \setminus B\} \cup \{B_{r_b}(b) : b \in B\} \quad (6.1)$$

es un cubrimiento numerable de X sin ningún subcubrimiento finito, porque para cada $b \in B$, la bola $B_{r_b}(b)$ es el único elemento de (6.1) que contiene a b .

5. \Leftrightarrow 6. Por las leyes de Morgan. \square

Corolario 6.10. *Todo espacio métrico compacto es separable.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 6.9 y la Proposición 6.7, pero también se sigue inmediatamente de que por la Proposición 4.7, un espacio métrico es separable si y sólo si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento contable. \square

Teorema 6.11. *Para todo espacio métrico X es verdad que:*

1. *Todo subconjunto compacto de X es totalmente acotado y cerrado.*
2. *X es completo si y solo si todo subconjunto totalmente acotado y cerrado de X es compacto.*

Demostración. 1. Por el Teorema 6.9 y la Proposición 6.3, los subconjuntos compactos de X son totalmente acotados y cerrados.

2. Supongamos primero que X es completo. Entonces, por la Proposición 5.11, los subconjuntos totalmente acotados y cerrados de X son totalmente acotados y completos. En consecuencia, nuevamente por el Teorema 6.9, son compactos. Supongamos ahora que todos los subconjuntos totalmente acotados y cerrados de X son compactos, y tomemos una sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X . Por el Ejercicio 2 y el ítem 3 de la Proposición 6.6, el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es totalmente acotado y completo y, por lo tanto, es compacto. Por el Teorema 6.9, esto implica que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, lo que, por la Proposición 5.4, basta para garantizar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es arbitraria, esto prueba que X es completo. \square

Teorema 6.12. *Si X_1, \dots, X_n son compactos, entonces el producto $X_1 \times \dots \times X_n$ es compacto.*

Demostración. Para $n = 1$ esto es claro. Supongamos que es cierto cuando $n = m$ y que $n = m + 1$. Tomemos una sucesión $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos de $X_1 \times \dots \times X_n$ y escribamos $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{i,m+1})$. Por hipótesis inductiva hay una subsucesión $(\mathbf{x}_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que, para cada k con $1 \leq k \leq m$ la sucesión $(x_{i_j,k})_{j \in \mathbb{N}}$ converge. Tomando una subsucesión adecuada de $(\mathbf{x}_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$, podemos conseguir que la sucesión formada por las últimas coordenadas también sea convergente. Por el Corolario 1.82, esto prueba que $X_1 \times \dots \times X_n$ es compacto. \square

Lema 6.13. *Toda sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de un conjunto totalmente ordenado Y , tiene una subsucesión creciente o una subsucesión decreciente.*

Demostración. Denotemos con D al conjunto de todos los índices n tales que $y_n > y_i$ para todo $i > n$. Si D es infinito y $D = \{i_1 < i_2 < \dots\}$, entonces $y_{i_1} > y_{i_2} > y_{i_3} > \dots$. Así que podemos suponer que D es finito, y que por lo tanto tiene un máximo elemento n_0 . Como $n_1 := n_0 + 1$ no pertenece a D , existe $n_2 > n_1$ tal que $y_{n_1} \leq y_{n_2}$. Como $n_2 \notin D$, existe $n_3 > n_2$ tal que $y_{n_2} \leq y_{n_3}$. Prosiguiendo de esta manera obtenemos una subsucesión creciente $(y_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

En el lema y teorema que siguen \mathbb{R}^n es pensado como un espacio métrico via la distancia d_∞ . Por el Ejercicio 3 de la Sección 3.5, si cambiáramos d_∞ por cualquier otra de las distancias introducidas en los Ejemplos 1.3, obtendríamos los mismos resultados.

Lema 6.14. *El producto $I = I_1 \times \dots \times I_n$ de una familia finita de intervalos cerrados y acotados de \mathbb{R} es compacto.*

Demostración. Por el Teorema 6.12 basta probar que todo intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ de \mathbb{R} es compacto. Por el Teorema 6.9 para ello es suficiente mostrar que toda sucesión de puntos de $[a, b]$ tiene una subsucesión convergente. Pero esto se sigue inmediatamente del Lema 6.13. En efecto, por este lema toda sucesión de puntos de $[a, b]$ tiene una subsucesión monótona, la cual, siendo acotada, converge (una alternativa, para hacer esencialmente la misma demostración, es usar, en lugar del Lema 6.13, la noción de límite superior de una sucesión de números reales). \square

Teorema 6.15. *Un subconjunto C de \mathbb{R}^n es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Demostración. si C es compacto, entonces por el item 5 de la Proposición 6.6 y los Teoremas 6.9 y 6.11, es cerrado y acotado. Recíprocamente, si C es cerrado y acotado, entonces es un subconjunto cerrado de un cubo $I = I_1 \times \dots \times I_n$, el cual es compacto por el Lema 6.14. Así, por el Teorema 6.11 también lo es C . \square

Ejemplo 6.16. El conjunto de Cantor \mathcal{C} , introducido en la Subsección 2.2.1, es compacto porque es un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R} .

En la Observación que sigue respondemos la cuestión planteada en la Observación 1.91.

Observación 6.17. Recordemos que el símbolo \mathbb{R}^* denota a la recta real extendida. Dado que la función $f: \mathbb{R}^* \rightarrow [-1, 1]$, definida por

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \text{si } x \in \mathbb{R}, \\ 1, & \text{si } x = \infty, \\ -1, & \text{si } x = -\infty, \end{cases}$$

es biyectiva, con inversa

$$f^{-1}(y) := \begin{cases} \frac{y}{1-|y|}, & \text{si } y \in (0, 1), \\ \infty, & \text{si } y = 1, \\ -\infty, & \text{si } y = -1, \end{cases}$$

(Vease el Ejemplo 3.25), \mathbb{R}^* es un espacio métrico via la distancia d^f definida en el item 7 del Ejemplo 1.3. Además, Por el Ejemplo 3.64 sabemos que la función $f: (\mathbb{R}^*, d^f) \rightarrow [-1, 1]$ es una isometría. En consecuencia, (\mathbb{R}^*, d^f) es compacto. En el Ejemplo 3.25 vimos que la restricción de f a \mathbb{R} es un homeomorfismo de \mathbb{R} (con la estructura usual de espacio métrico) con su imagen. Por lo tanto una sucesión de elementos de \mathbb{R} converge a un número real en (\mathbb{R}^*, d^f) si y solo si converge a ese mismo número en \mathbb{R} provisto de la distancia usual, y es claro que lo mismo es cierto para sucesiones que toman los valores $\pm\infty$ un número finito de veces. Afirmamos que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a $\pm\infty$ en (\mathbb{R}^*, d^f) si y solo si lo hace en el sentido usual. En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \\ &\Leftrightarrow \text{Para todo } 1 > \epsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow f(x_n) > 1 - \epsilon \\ &\Leftrightarrow \text{Para todo } 1 > \epsilon > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow x_n > f^{-1}(1 - \epsilon), \end{aligned}$$

donde la última equivalencia se sigue de que f es creciente y define por restricción un homeomorfismo de \mathbb{R} con $(0, 1)$. Esto muestra que la convergencia a $+\infty$ es la usual, y un cálculo similar prueba que la convergencia a $-\infty$ también lo es.

Ahora daremos una caracterización de la compacidad análoga a la caracterización de completitud exhibida en el Teorema 5.17.

Proposición 6.18. *Para cada espacio métrico X son equivalentes:*

1. X es compacto.
2. Cada sucesión decreciente de cerrados no vacíos $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$ de X tiene intersección no vacía.
3. La unión de cada sucesión creciente de abiertos propios $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \dots$ de X es un abierto propio de X .

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Como X es compacto, si $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \emptyset$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$C_n = \bigcap_{i=1}^n C_i = \emptyset.$$

Pero esto es imposible, porque $C_n \neq \emptyset$. Así que $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \neq \emptyset$.

2. \Rightarrow 3. Por el ítem 2 y las Leyes de Morgan, como $X \setminus U_1 \supseteq X \setminus U_2 \supseteq X \setminus U_3 \supseteq \dots$ es una intersección decreciente de cerrados no vacíos de X ,

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus U_i) \neq \emptyset.$$

Pero entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \subsetneq X$.

3. \Rightarrow 1. Por el Teorema 6.9 para probar esto es suficiente verificar que todo cubrimiento abierto numerable $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X tiene un subcubrimiento finito. Para ello escribamos $U_n := \bigcup_{i=1}^n V_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la misma definición de los U_i 's, es claro que $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \dots$ y

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = X.$$

Por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_0} = \bigcup_{i=1}^{n_0} V_i = X$, como queremos. \square

Ejercicios

1. Pruebe que toda unión finita de subconjuntos compactos de un espacio métrico X es un subconjunto compacto de X .
2. Pruebe que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de X , entonces el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es totalmente acotado.
3. Pruebe que un producto de finitos espacios métricos es totalmente acotado si y solo si sus coordenadas lo son.
4. Pruebe que un subconjunto A de X es totalmente acotado si y solo si toda sucesión de puntos de A tiene una subsucesión de Cauchy.
5. Pruebe que vale la recíproca del Teorema 6.12 (esto es, que si un producto de finitos espacios métricos es compacto, entonces todas sus coordenadas lo son).

6.2. Funciones continuas sobre espacios compactos

Teorema 6.19. Si X es compacto y $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de Y .

Demostración. Si $(U_i)_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de $f(X)$, entonces $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X . Como X es compacto, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $X \subseteq f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n})$. Por lo tanto, $f(X) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$. \square

Corolario 6.20. Si X es compacto y $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces f es cerrada.

Demostración. Por el ítem 2 del Teorema 6.11, si A es cerrado en X , entonces es compacto. En consecuencia, por el Teorema 6.19, $f(A)$ es compacto y así, por el ítem 1 del Teorema 6.11, cerrado en Y . \square

Corolario 6.21. Si $f: X \rightarrow Y$ es biyectiva y continua y X es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del Corolario 6.20 y la Observación 3.24. \square

Una de las propiedades más importantes de los intervalos cerrados y acotados de números reales es que, como afirma el Teorema de Bolzano, toda función real continua definida sobre uno tiene un máximo y un mínimo globales. Los espacios métricos compactos tienen la misma propiedad. En efecto, si X es compacto y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces por los Teoremas 6.15 y 6.19 su imagen $f(X)$ es un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R} y, por lo tanto, existen x_0 y x_1 en X tales que $f(x_0) = \text{Inf}(f(X))$ y $f(x_1) = \text{Sup}(f(X))$. El siguiente resultado muestra que no existen espacios no compactos con esta propiedad.

Teorema 6.22. Para todo espacio métrico X son equivalentes:

1. X es compacto.
2. Toda función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo y un mínimo globales.
3. Toda función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Lo acabamos de probar.

2. \Rightarrow 3. Esto es claro.

3. \Rightarrow 1. Por el Teorema 6.9 es suficiente probar que X es totalmente acotado y completo. Supongamos primero que no es totalmente acotado. Entonces existen $\epsilon > 0$ y una sucesión $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tal que $d(x_i, x_j) > \epsilon$ si $i \neq j$. Por el Teorema 3.13 sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay una función continua $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que se anula en $X \setminus B_{\epsilon/4}(x_n)$ y vale 1 en x_n . La función $g: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} n f_n(x),$$

está bien definida porque para cada $x \in X$ existe a lo sumo un $n \in \mathbb{N}$ con $f_n(x) \neq 0$ (if $f_n(x) \neq 0$, entonces $d(x, x_n) < \epsilon/4$, lo que por la propiedad triangular implica que $d(x, x_i) \geq \epsilon/4$ para todo $i \neq n$, por lo que $f_i(x) = 0$), no es acotada porque $g(x_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y es continua porque lo es en cada punto debido a que coincide con $n f_n$ en $B_{\epsilon/2}(x_n)$ y se anula en $X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\epsilon/3}(x_n)$. Esto prueba que X es totalmente acotado. Supongamos ahora que no es completo y tomemos una sucesión de

Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X que no es convergente. Por el Teorema 5.30 sabemos que X tiene una completación \tilde{X} , y podemos suponer que $X \subset \tilde{X}$. La función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) := \frac{1}{d(x, \tilde{x})},$$

donde \tilde{x} es el límite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en \tilde{X} , no es acotada porque $d(x_n, \tilde{x})$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, y es continua por el ítem 1 de la Proposición 3.6, debido a que es la composición de la función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\text{inv}} & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

(que es continua por el Ejercicio 4), con la función

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x & \longmapsto & d(x, \tilde{x}) \end{array}$$

(que lo es por el Ejemplo 3.51 y el ítem 2 de la Proposición 3.6). Por lo tanto X es completo. \square

Corolario 6.23. *Supongamos que A y C son subconjuntos de un espacio métrico X , y que C compacto y no vacío. Entonces existe un punto $c \in C$ tal que $d(C, A) = d(c, A)$.*

Demostración. Si $A = \emptyset$, entonces $d(c, A) = d(C, A) = \infty$ para cada $c \in C$. Por otra parte, si $A \neq \emptyset$, entonces, como vimos en el Ejemplo 3.51, la función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) := d(x, A)$, es continua. Por lo tanto también lo es su restricción a C . En consecuencia, por el Teorema 6.22 existe un punto $c \in C$ tal que

$$d(c, A) = f(c) = \min\{d(x, A)\}_{x \in C} = d(C, A),$$

como queremos. \square

Corolario 6.24. *Supongamos que A y C son subconjuntos de un espacio métrico X . Si C es compacto, entonces $d(C, A) > 0$ si y solo si $C \cap \overline{A} = \emptyset$.*

Demostración. Por el Corolario 6.23, si $C \neq \emptyset$, entonces existe $c \in C$ tal que $d(C, A) = d(c, A)$ y, por lo tanto $d(C, A) > 0$ si y solo si $d(c, A) > 0$, lo que por la Proposición 2.56 ocurre si y solo si $c \notin \overline{A}$. Si $C = \emptyset$ la demostración es más simple. Basta observar que $d(C, A) = \infty$ y $C \cap \overline{A} = \emptyset$. \square

Corolario 6.25. *Para todo par de subconjuntos compactos C y D de un espacio métrico X , existen puntos $c \in C$ y $d \in D$ tales que $d(C, D) = d(c, d)$.*

Demostración. Por la simetría de la función distancia y el Corolario 6.23, existen $c \in C$ y $d \in D$ tales que

$$d(C, D) = d(c, D) = d(c, d),$$

como queremos. \square

Ejercicios

1. Pruebe que para cada espacio métrico X son equivalentes:
 - a) X es compacto.
 - b) Toda función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada superiormente.
 - c) Toda función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo global.
 - d) Toda función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada inferiormente.
 - e) Toda función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo global.

6.3. La propiedad del número de Lebesgue

Definición 6.26. Decimos que un número real $\epsilon > 0$ es un *número de Lebesgue* de un cubrimiento abierto $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de un espacio métrico X , si todo subconjunto de X de diámetro menor que ϵ está incluido en un miembro del cubrimiento. En otras palabras, si para todo subconjunto A de X de diámetro menor que ϵ , existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $A \subseteq U_\lambda$. Un espacio métrico tiene la *propiedad del número de Lebesgue* si todo cubrimiento abierto de X tiene un número de Lebesgue.

Observación 6.27. Es claro que un cubrimiento abierto $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, de un espacio métrico X , tiene un número de Lebesgue si y solo si existe $r > 0$ con la propiedad de que para todo $x \in X$ hay un $\lambda_x \in \Lambda$ tal que $B_r(x) \subseteq U_{\lambda_x}$.

Ejemplo 6.28. Si X tiene la métrica discreta, entonces X tiene la propiedad del número de Lebesgue, porque cada subconjunto no vacío de diámetro menor que 1 de X tiene un solo punto.

Teorema 6.29. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y X tiene la propiedad del número de Lebesgue, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $d(x, x') < \delta_x \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \epsilon/2$. La familia $\mathcal{B} := (B_{\delta_x}(x))_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto de X . Supongamos que δ es un número de Lebesgue de \mathcal{B} . Por la misma definición de número de Lebesgue, dados $x, x' \in X$ con $d(x, x') < \delta$, existe $x'' \in X$ tal que $x, x' \in B_{\delta_{x''}}(x)$. Por lo tanto

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(x'')) + d(f(x''), f(x')) < \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, esto prueba que f es uniformemente continua. □

Proposición 6.30. Todo espacio métrico que tiene un número de Lebesgue es completo.

Demostración. Supongamos que X no es completo y tomemos una completación \tilde{X} de X con $X \subseteq \tilde{X}$. Dado $\tilde{x} \in \tilde{X} \setminus X$ ($\tilde{X} \setminus X$ es no vacío porque X no es completo), la colección

$$\{X \setminus B_{1/n}[\tilde{x}] : n \in \mathbb{N}\} \tag{6.2}$$

es un cubrimiento abierto de X que no tiene ningún número de Lebesgue, porque para todo $\epsilon > 0$, el conjunto $X \cap B_{\epsilon/2}(\tilde{x})$ es un subconjunto abierto no vacío de X , de diámetro menor que ϵ , que no está incluido en ningún elemento de (6.2). □

Teorema 6.31. Un espacio métrico X es compacto si y solo si es totalmente acotado y tiene la propiedad del número de Lebesgue.

Demostración. Por los Teoremas 6.9 y 6.30 solo debemos probar que si X es compacto, entonces tiene la propiedad del número de Lebesgue. Para ello será suficiente mostrar que, dado un cubrimiento abierto arbitrario $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de X , la función $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, definida por

$$f(x) := \text{Sup}\{r > 0 : \text{existe } \lambda \in \Lambda \text{ tal que } B_r(x) \subseteq U_\lambda\}$$

(f está bien definida porque X tiene diámetro finito debido a que es compacto), es continua. En efecto, por el Teorema 6.22 la función f tiene un mínimo $f(x_0) > 0$ y, por la misma definición de f ,

para todo $x \in X$ existe un $\lambda_x \in \Lambda$ tal que $B_{f(x_0)}(x) \subseteq U_{\lambda_x}$. Entonces nos hemos reducido a probar que f es continua, para lo cual es suficiente ver que

$$f(x) = a \text{ y } d(x, x') < \delta \Rightarrow a - \delta \leq f(x') \leq a + \delta.$$

La primera desigualdad vale trivialmente si $a - \delta \leq 0$, y también vale cuando $a - \delta > 0$, porque, por la propiedad triangular, $B_r(x') \subseteq B_{r+d(x,x')}(x)$ para todo $r > 0$ y, por la definición de $f(x)$, si $r \leq a - \delta$, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $B_{r+d(x,x')}(x) \subseteq U_\lambda$, porque $r + d(x, x') < a$. La segunda desigualdad vale, porque, si fuera $f(x') > a + \delta$, entonces por la propiedad triangular y la definición de $f(x')$ existiría $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$B_{f(x')-\delta}(x) \subseteq B_{f(x')-\delta+d(x,x')}(x') \subseteq U_\lambda,$$

lo que contradice la definición de $f(x)$, porque $f(x') - \delta > a$. □

Corolario 6.32. Si $f: X \rightarrow Y$ es continua y X es compacto, entonces f es uniformemente continua.

Demostración. Por los Teoremas 6.29 y 6.31. □

6.4. El Teorema de Arzelá-Ascoli

Definición 6.33. Un conjunto $Y \subseteq X$ es *relativamente compacto* si \bar{Y} es compacto.

Observación 6.34. Por los ítems 1 y 2 de la Proposición 6.6, el Teorema 6.9 y el hecho de que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es un espacio métrico completo, si X es completo, entonces Y es relativamente compacto si y solo si es totalmente acotado.

Recordemos que para cada par de espacios métricos X y Z , el conjunto $C(Z, X)$, de las funciones continuas y acotadas de Z en X es un espacio métrico via la distancia d_∞ .

Definición 6.35. Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq C(Z, X)$ es *equicontinuo* si para cada $z \in Z$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(z', z) < \delta \Rightarrow d(f(z'), f(z)) < \epsilon \quad \text{para todo } z' \in Z \text{ y } f \in \mathcal{F},$$

y es *uniformemente equicontinuo* si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(z', z) < \delta \Rightarrow d(f(z'), f(z)) < \epsilon, \quad \text{para todo } z, z' \in Z \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

Teorema 6.36 (Arzelá-Ascoli). Consideremos $\mathcal{F} \subseteq C(Z, X)$, y escribamos $\mathcal{F}(z) := \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ para todo $z \in Z$. Si Z es compacto y X es completo, entonces son equivalentes:

1. \mathcal{F} es equicontinuo y $\mathcal{F}(z)$ es relativamente compacto para todo $z \in Z$.
2. \mathcal{F} es relativamente compacto
3. \mathcal{F} es uniformemente equicontinuo y $\mathcal{F}(z)$ es relativamente compacto para todo $z \in Z$.

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Tomemos $\epsilon > 0$. Como \mathcal{F} es equicontinua, para cada $z \in Z$ existe $\delta_z > 0$, tal que si $z' \in B_{\delta_z}(z)$, entonces $d(f(z), f(z')) < \epsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Por compacidad,

$$Z \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\delta_{z_i}}(z_i),$$

para un subconjunto finito $\{z_1, \dots, z_n\}$ de puntos de Z . Como $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}(z_i)$ es totalmente acotado, existen un número finito de bolas $B_\epsilon(a_j)$ de radio ϵ , tales que

$$\bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}(z_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^m B_\epsilon(a_j).$$

Denotemos con \mathbb{I}_{nm} al conjunto de todas las funciones $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$. Para cada $\sigma \in \mathbb{I}_{nm}$, escribamos $\mathcal{F}_\sigma = \{f \in \mathcal{F} : d(f(z_i), a_{\sigma(i)}) < \epsilon, \text{ para todo } i\}$. Es fácil ver que

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{I}_{nm}} \mathcal{F}_\sigma.$$

Asumamos ahora que f y g son funciones que pertenecen a un mismo \mathcal{F}_σ . Dado $z \in Z$, existe z_i tal que $d(z, z_i) < \delta_{z_i}$. Entonces,

$$d(f(z), g(z)) \leq d(f(z), f(z_i)) + d(f(z_i), a_{\sigma(i)}) + d(a_{\sigma(i)}, g(z_i)) + d(g(z_i), g(z)) < 4\epsilon.$$

Así, $\text{diám}(\mathcal{F}_\sigma) < 4\epsilon$. Como ϵ y σ son arbitrarios, esto muestra que \mathcal{F} es totalmente acotado.

2. \Rightarrow 3. Tomemos $\epsilon > 0$. Por la Observación 6.34, como \mathcal{F} es relativamente compacto, existen subconjuntos $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ de $C(Z, X)$, todos de diámetro menor que ϵ , tales que $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_i$. Elijamos

$$f_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_n.$$

Dado que, por el Teorema 6.32, las f_i 's son uniformemente continuas, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(z, z') < \delta \Rightarrow d(f_i(z), f_i(z')) < \epsilon \quad \text{para todo } i.$$

Fijado $f \in \mathcal{F}$, existe i tal que $d_\infty(f, f_i) < \epsilon$. Por lo tanto, si $d(z, z') < \delta$, entonces

$$d(f(z), f(z')) \leq d(f(z), f_i(z)) + d(f_i(z), f_i(z')) + d(f_i(z'), f(z')) \leq 3\epsilon.$$

Esto prueba que \mathcal{F} es uniformemente equicontinua. Finalmente, $\mathcal{F}(z)$ es relativamente compacto para todo $z \in Z$, porque \mathcal{F} es relativamente compacto y la aplicación

$$\text{ev}_z: \overline{\mathcal{F}} \rightarrow X,$$

definida por $\text{ev}_z(f) = f(z)$, es continua.

3. \Rightarrow 1. Esto es claro. □

6.5. Dos aplicaciones importantes

En esta sección usamos la noción de compacidad para dar pruebas del Teorema fundamental del álgebra y del Teorema de Stone-Weirstrass.

6.5.1. El teorema fundamental del álgebra

El Teorema fundamental del Algebra asegura que todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene una raíz. Aquí daremos una prueba basada en el hecho de que una función real continua definida sobre un compacto alcanza su mínimo.

Teorema 6.37 (Teorema fundamental del álgebra). *Para cada polinomio no constante $P \in \mathbb{C}[X]$, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.*

Demostración. Escribamos $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$. Como

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = \lim_{z \rightarrow \infty} |z|^n \left| a_n + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_1 \frac{1}{z^{n-1}} + a_0 \frac{1}{z^n} \right| = \infty,$$

existe $r > 0$ tal que $|P(z)| > |P(0)|$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus B_r[0]$. En consecuencia existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. En efecto, por el Teorema 6.22 existe $z_0 \in B_r[0]$ tal que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in B_r[0]$. Como

$$|P(z)| > |P(0)| \geq |P(z_0)| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus B_r[0],$$

$|P(z)| \geq |P(z_0)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$, como afirmamos. Supongamos que $P(z_0) \neq 0$. Reemplazando P por $\frac{1}{P(z_0)} P(X - z_0)$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $z_0 = 0$ y $P(0) = 1$. Sea m tal que $a_m \neq 0$ y $a_i = 0$ para $0 < i < m$. Entonces

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_m z^m + 1 = \varrho(z) a_m z^m + a_m z^m + 1,$$

donde

$$\varrho(z) := \frac{a_n}{a_m} z^{n-m} + \dots + \frac{a_{m+1}}{a_m} z.$$

Fijemos $b \in \mathbb{C}$ tal que $b^m = -a_m^{-1}$ y elijamos $1 > \delta > 0$ tal que $|\varrho(tb)| < \frac{1}{2}$ si $|t| < \delta$ (δ existe porque ϱ es continua y $\varrho(0) = 0$). Entonces

$$\begin{aligned} |P(tb)| &= |\varrho(tb) a_m t^m b^m + a_m t^m b^m + 1| \\ &= |-\varrho(tb) t^m - t^m + 1| \\ &\leq |\varrho(tb) t^m| + |1 - t^m| \\ &= |\varrho(tb)| |t^m| + |1 - t^m| \\ &\leq \frac{1}{2} t^m + 1 - t^m \\ &= 1 - \frac{1}{2} t^m \end{aligned}$$

para todo $t \in (0, \delta)$, lo que contradice la minimalidad de $|P(0)|$. Por lo tanto $P(0) = 0$. \square

6.5.2. El Teorema de Stone-Weirstrass

Definición 6.38. Tomemos un conjunto X . Decimos que una función $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es *menor o igual* que otra $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, y escribimos $f \leq g$, si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$.

Observaciones 6.39. El conjunto \mathbb{R}^X , de funciones de X en \mathbb{R} , es un conjunto ordenado (más aún, es un reticulado aunque esto no vamos a usarlo) via la relación dada en la definición anterior. Es claro que la relación de orden presentada en el Ejemplo ?? es la inducida por esta.

Definición 6.40. Decimos que una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de funciones de un conjunto X en \mathbb{R} , es *creciente* si lo es respecto de la relación de orden dada en la Definición 6.38. Esto es, si $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$.

Teorema 6.41 (Dini). *Consideremos una función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, donde X es un espacio métrico compacto. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un sucesión creciente de funciones continuas de X en \mathbb{R} y $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ (convergencia puntual), entonces f_n tiende a f uniformemente.*

Demostración. Por hipótesis, para cada $x \in X$ y $\epsilon > 0$ existe $n_0(x)$ tal que $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0(x)$. Además, como $f_{n_0(x)}$ y f son continuas, hay un entorno abierto V_x de x tal que $d(f_{n_0(x)}(x'), f(x')) < \epsilon$ para todo $x' \in V_x$. Entonces, dado que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, $d(f_n(x), f(x')) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0(x)$ y $x' \in V_x$. Por compacidad, existen $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $X = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$. Debido de nuevo a que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, si $n \geq \max\{n_0(x_1), \dots, n_0(x_m)\}$, entonces $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$. \square

Lema 6.42. *La sucesión de polinomios $P_n(t) \in \mathbb{R}[t]$, definida recursivamente por*

- $P_0(t) := 0$,
- $P_{n+1}(t) := P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$,

es creciente en $[0, 1]$ y tiende a \sqrt{t} uniformemente en $[0, 1]$.

Demostración. Es claro que $P_n(0) = 0$ para todo $n \geq 0$ ^[1]. Afirmamos que

$$0 \leq P_n(t) < P_{n+1}(t) < \sqrt{t} \quad \text{para todo } n \geq 0 \text{ y todo } t \in (0, 1). \quad (6.3)$$

Para probar que esto es cierto fijemos un $t \in (0, 1)$. La desigualdad (6.3) es verdadera para $n = 0$ y t , porque $0 < \frac{1}{2}t < \sqrt{t}$. Supongamos que $0 \leq P_{n-1}(t) < P_n(t) < \sqrt{t}$. Entonces

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t)) > P_n(t)$$

porque $P_n^2(t) < t$. Para concluir la prueba de la afirmación resta ver que $P_{n+1}(t) < \sqrt{t}$, para lo que es suficiente notar que, por hipótesis inductiva, $P_n(t) < \sqrt{t} < 2 - \sqrt{t}$, y que

$$\begin{aligned} P_{n+1}(t) < \sqrt{t} &\Leftrightarrow P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t)) < P_n(t) + \sqrt{t} - P_n(t) \\ &\Leftrightarrow t - P_n^2(t) < 2(\sqrt{t} - P_n(t)) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{t} + P_n(t) < 2 \\ &\Leftrightarrow P_n(t) < 2 - \sqrt{t}, \end{aligned}$$

donde la tercera desigualdad equivale a la cuarta porque $\sqrt{t} - P_n(t) > 0$.

Escribamos ahora $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t)$. Como $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$,

$$f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t - f(t)^2),$$

por lo que $f(t) = \sqrt{t}$. Finalmente, la convergencia es uniforme por el Teorema de Dini. \square

Definición 6.43. Una \mathbb{R} -álgebra conmutativa es un anillo conmutativo unitario A , junto con un morfismo de anillos unitarios $i: \mathbb{R} \rightarrow A$. Una subálgebra B de A es un subanillo unitario B de A tal que $i(\mathbb{R}) \subseteq B$.

Ejemplo 6.44. Para cada espacio métrico X , el conjunto $C(X, \mathbb{R})$, de las funciones continuas y acotadas de X en \mathbb{R} , es una \mathbb{R} -álgebra via

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$,
- $i(\lambda)(x) = \lambda$.

Definición 6.45. Una subálgebra A de $C(X, \mathbb{R})$ *separa puntos* si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Proposición 6.46. Si A es una subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$, entonces la adherencia \bar{A} , de A respecto de la distancia d_∞ , también lo es.

Demostración. Tomemos $f_n, g_n, f, g \in C(X, \mathbb{R})$. Como la suma y el producto en \mathbb{R} son continuos, si

$$f = \lim_{\text{unif}} f_n \quad \text{y} \quad g = \lim_{\text{unif}} g_n,$$

entonces $f + g = \lim_{\text{unif}} (f_n + g_n)$ y $fg = \lim_{\text{unif}} f_n g_n$. □

Teorema 6.47 (Stone-Weirstrass). *Consideremos un espacio métrico compacto X . Toda subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$, que separa puntos, es densa.*

Demostración. Supongamos que A es una subálgebra de $C(X, \mathbb{R})$ que separa puntos. Probaremos que $\bar{A} = C(X, \mathbb{R})$ en varios pasos.

1. Si $f, g \in \bar{A}$, entonces $\text{máx}(f, g)$ y $\text{mín}(f, g)$ pertenecen a \bar{A} . En efecto, como

$$\text{máx}(f, g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{y} \quad \text{mín}(f, g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},$$

donde $|f - g|$ es la función definida por $|f - g|(x) = |f(x) - g(x)|$, para verificar esta afirmación, bastará probar que $h \in \bar{A} \Rightarrow |h| \in \bar{A}$. Pero por el Lema 6.42 sabemos que

$$MP_n \circ \frac{1}{M^2} h^2 \xrightarrow{\text{unif}} \sqrt{h^2} = |h|,$$

donde $M > 0$ es cualquier cota superior de $\{|h(x)| : x \in X\}$, y como $P_n \circ \frac{1}{M^2} h^2 \in \bar{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de este hecho se sigue que $|h| \in \bar{A}$.

2. Dados $x, y \in X$ y $a, b \in \mathbb{R}$, existe $f \in A$ tal que $f(x) = a$ y $f(y) = b$. En efecto, si $g \in A$ satisface $g(x) \neq g(y)$, podemos tomar

$$f(z) = a + (b - a) \left(\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)} \right).$$

3. Dados $h \in C(X, \mathbb{R})$, $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe $h_x \in \bar{A}$ tal que $h_x(x) = h(x)$ y $h_x(x') \leq h(x') + \epsilon \forall x' \in X$. En efecto, por el segundo paso para cada $y \in X$ podemos elegir una función real continua $h_{xy} \in A$, tal que $h_{xy}(x) = h(x)$ y $h_{xy}(y) = h(y)$. Una vez hecho esto podemos tomar un entorno abierto V_y de y tal que $h_{xy}(y') < h(y') + \epsilon$ para todo $y' \in V_y$. Por compacidad, existen $y_1, \dots, y_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^m V_{y_i}$. La función $h_x = \text{mín}(h_{xy_1}, \dots, h_{xy_m})$ satisface la desigualdad pedida y, por el primer paso, pertenece a \bar{A} .

4. Dados $h \in C(X, \mathbb{R})$ y $\epsilon > 0$, existe $\tilde{h} \in \bar{A}$ tal que $h - \epsilon < \tilde{h} < h + \epsilon$. En efecto, para cada $x \in X$, tomemos h_x como en el tercer paso, y un entorno abierto V_x de x tal que $h_x(x') > h(x') - \epsilon$ para todo $x' \in V_x$. Por compacidad existen $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$. Claramente la función $\tilde{h} = \text{máx}(h_{x_1}, \dots, h_{x_m})$ satisface la desigualdad pedida y, por el primer paso, pertenece a \bar{A} . □

Corolario 6.48 (Weirstrass). *Toda función continua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es límite uniforme de una sucesión P_1, P_2, P_3, \dots de funciones polinomiales $P_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 6.47, porque el álgebra de las funciones polinomiales de $[a, b]$ en \mathbb{R} , es una subálgebra de $C([a, b], \mathbb{R})$, que separa puntos. \square

ESPACIOS CONEXOS Y ESPACIOS ARCO-CONEXOS

En este capítulo presentamos las nociones de conexión, arco-conexión, conexión local y arco-conexión local. Los conceptos de espacio conexo y espacio arco-conexo formalizan la idea de que un espacio está hecho de una sola pieza, interpretándola de dos maneras distintas. No son equivalentes, siendo el segundo más estricto que el primero. Los conceptos de espacio localmente conexo y de espacio localmente arco-conexo formalizan la versión local de esta idea. Como veremos más adelante las versiones locales son independientes de las globales en el sentido de que un espacio puede tener ambas propiedades, una sola de las dos, o ninguna.

7.1. Espacios conexos

La idea de espacio conexo es la de espacio hecho de una sola pieza, en el sentido de que no puede escribirse como unión de dos abiertos disjuntos no vacíos. Intuitivamente es claro que \mathbb{R} y los intervalos de \mathbb{R} son conexos (aunque, como veremos, esto no es tan fácil de probar) y que el conjunto $\{0, 1\}$, con la métrica discreta, no lo es. Un poco menos obvio es que \mathbb{Q} no es conexo, aunque esto también es cierto. Una descomposición se obtiene escribiendo

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}.$$

Ahora damos la definición formal, comenzando con el concepto de espacio no conexo. Recordemos que X y el conjunto vacío son subconjuntos abiertos y cerrados de cada espacio métrico X .

Definición 7.1. Un espacio métrico X es *desconexo* si tiene un subconjunto abierto y cerrado no vacío y propio. Un espacio métrico es *conexo* si no es desconexo. Un subconjunto Y de X es *conexo*, si lo es con la métrica inducida.

Proposición 7.2. Para cada espacio métrico X son equivalentes:

1. X es desconexo.
2. Existen subconjuntos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $X = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
3. Existen subconjuntos cerrados C_1 y C_2 de X tales que $C_1 \neq \emptyset$, $C_2 \neq \emptyset$, $X = C_1 \cup C_2$ y $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

4. Hay una función continua sobreyectiva $\varphi: X \rightarrow \{0, 1\}$ (aquí $\{0, 1\}$ es considerado provisto de la métrica discreta).

Demostración. 1. \Rightarrow 2. Supongamos que U es un subconjunto no vacío y propio de X que es abierto y cerrado. Es claro que $U_1 := U$ y $U_2 := X \setminus U$ satisfacen las condiciones pedidas en el ítem 2. En efecto, U_1 es abierto porque U es abierto y U_2 es abierto porque U es cerrado. Además

$$U_1 \cup U_2 = U \cup (X \setminus U) = X \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 = U \cap (X \setminus U) = \emptyset.$$

Por último, U_1 y U_2 son no vacíos porque $\emptyset \subsetneq U \subsetneq X$.

2. \Rightarrow 3. Como $X = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, U_2 es el complemento de U_1 . Pero entonces, como ambos conjuntos son abiertos, ambos son cerrados, y podemos tomar $C_1 = U_1$ y $C_2 = U_2$.

3. \Rightarrow 4. La función $\varphi: X \rightarrow \{0, 1\}$, definida por

$$\varphi(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C_1, \\ 1 & \text{si } x \in C_2, \end{cases}$$

es continua porque la preimagen de cada subconjunto cerrado de $\{0, 1\}$ (y todos lo son) es un subconjunto cerrado de X , y es sobreyectiva porque C_1 y C_2 son no vacíos.

3. \Rightarrow 4. Como φ es continua, el conjunto $\varphi^{-1}(0)$ es abierto y cerrado, y como φ es sobreyectiva, $\emptyset \subsetneq \varphi^{-1}(0) \subsetneq X$. \square

Definición 7.3. Dos subconjuntos A y B de un espacio métrico X están separados si $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Teorema 7.4. Consideremos dos subconjuntos A y B de un espacio métrico X y escribamos $Y := A \cup B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A y B son subconjuntos separados de X .
2. A y B son cerrados en Y y $A \cap B = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que A y B subconjuntos separados de X . Entonces A y B son subconjuntos cerrados de Y porque, como $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$,

$$A = \overline{A} \cap A = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap Y \quad \text{y} \quad B = \overline{B} \cap B = (B \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B}) = Y \cap \overline{B}.$$

Además, $A \cap B = \emptyset$. Recíprocamente, si A y B son cerrados en Y y $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$A = \overline{A} \cap Y = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)$$

y, por lo tanto, $\overline{A} \cap B \subseteq A \cap B = \emptyset$. Similarmente $A \cap \overline{B} = \emptyset$, de modo que A y B son subconjuntos separados de X . \square

Corolario 7.5. Un subconjunto Y de un espacio métrico X es conexo si y solo si no es unión disjunta de subconjuntos no vacíos separados de X .

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 7.4 y de la equivalencia entre los ítems 1 y 3 de la Proposición 7.2. \square

Recordemos que, por definición, un subconjunto I de un conjunto totalmente ordenado (X, \leq) es un intervalo si $x, y \in I$ y $x < y$ implica que $a \in I$ para todo $a \in X$ tal que $x < a < y$. Esto es, si no existen $x < a < y$ en X con $x, y \in I$ y $a \in X \setminus I$.

Teorema 7.6. *Un subconjunto de \mathbb{R} es conexo si y solo si es un intervalo.*

Demostración. \Rightarrow) Si $Y \subseteq \mathbb{R}$ no es un intervalo, entonces existen $a, b \in Y$ y $c \in \mathbb{R} \setminus Y$ tales que $a < c < b$. Por lo tanto los conjuntos $Y_1 := Y \cap (-\infty, c)$ e $Y_2 := Y \cap (c, \infty)$ son no vacíos, e $Y = Y_1 \cup Y_2$. Además es claro que Y_1 e Y_2 tienen intersección vacía. Como, por la Proposición 2.20, Y_1 e Y_2 son abiertos de Y , esto muestra que Y no es conexo.

\Leftarrow) Supongamos que un intervalo Y es desconexo. Entonces existe una función continua no constante $\varphi: Y \rightarrow \{0, 1\}$. Tomemos $a < b \in Y$, con $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, y denotemos con x_0 al supremo de todos los $x \in [a, b]$ tales que φ es constante en $[a, x]$. Si $\varphi(x_0) = \varphi(a)$, entonces por la continuidad de φ existe $\epsilon > 0$ tal que φ es constante en $[a, x_0 + \epsilon]$; y si $\varphi(x_0) = \varphi(b)$, entonces, nuevamente por la continuidad de φ , existe $\epsilon > 0$ tal que $a < x_0 - \epsilon$ y $\varphi(x_0 - \epsilon) = \varphi(b)$. Como ambas situaciones son absurdas, Y es conexo. \square

Teorema 7.7. *Si X es conexo y $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Si $f(X)$ es desconexo, entonces tiene subconjuntos abiertos no vacíos A y B , tales que $f(X) = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. En consecuencia,

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) = X \quad \text{y} \quad f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset.$$

Además, como f es continua, $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de X . En conclusión, X es desconexo. \square

El siguiente resultado es una generalización del Teorema de Bolzano.

Corolario 7.8. *Un espacio métrico X es conexo si y solo si la imagen de cada función continua $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ es un intervalo.*

Demostración. Por los Teoremas 7.7 y 7.6, si X es conexo, entonces $f(X)$ es un intervalo para toda función real continua f con dominio X . Por otra parte, si X es desconexo, hay una función continua y sobreyectiva $\varphi: X \rightarrow \{0, 1\}$, la que al ser compuesta con la inclusión canónica $i: \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ se convierte en una función continua de X en \mathbb{R} , con imagen $\{0, 1\}$. \square

Teorema 7.9. *Si A es un subconjunto conexo de X y $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B = X$. Dado que A es conexo, toda función continua $\varphi: B \rightarrow \{0, 1\}$ es constante sobre A . Como $\varphi^{-1}(0)$ y $\varphi^{-1}(1)$ son cerrados, esto implica que φ es constante. \square

Corolario 7.10. *Si $A \subseteq X$ es conexo y denso, entonces X es conexo.*

Demostración. Por el Teorema 7.9 y porque $\overline{A} = X$. \square

Teorema 7.11. *Consideremos una familia $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos conexos de X . Si para cada par de puntos $x, x' \in \bigcup_{i \in I} A_i$, existen A_{i_1}, \dots, A_{i_n} tales que*

$$x \in A_{i_1}, \quad x' \in A_{i_n} \quad \text{y} \quad A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset \quad \text{para todo } j,$$

entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo.

Demostración. Como los conjuntos A_i son conexos, toda función continua

$$\varphi: \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \{0, 1\}$$

es constante sobre la unión de cada familia finita A_{i_1}, \dots, A_{i_n} , tal que $A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ para todo j . Por la hipótesis esto implica que φ es constante. \square

Proposición 7.12. *Un producto de dos espacios es conexo si y solo si cada uno de ellos lo es.*

Demostración. Consideremos un producto $X_1 \times X_2$ de dos espacios métricos. Por la Proposición 7.7, como las proyecciones canónicas $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ ($i = 1, 2$) son funciones continuas y sobreyectivas, si $X_1 \times X_2$ es conexo, entonces también lo son X_1 y X_2 . Supongamos, recíprocamente, que X_1 y X_2 son conexos. Entonces la familia de todos los subconjuntos de $X_1 \times X_2$ de la forma $X_1 \times \{x\}$ ($x \in X_2$) o $\{x\} \times X_2$ ($x \in X_1$) satisface las hipótesis de Teorema 7.11. En efecto, sus miembros son conexos porque son homeomorfos a X_1 o a X_2 , y para cada par (x_1, x_2) y (x'_1, x'_2) de puntos de $X_1 \times X_2$,

$$(x_1, x_2) \in X_1 \times \{x_2\}, \quad (x'_1, x'_2) \in \{x'_1\} \times X_2 \quad \text{y} \quad (X_1 \times \{x_2\}) \cap (\{x'_1\} \times X_2) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $X_1 \times X_2$ es conexo. \square

Corolario 7.13. *Un producto de un número finito de espacios métricos es conexo si y solo si cada uno de ellos lo es.*

Demostración. Se sigue del resultado anterior por inducción. \square

Definición 7.14. La *componente conexa* de un punto x de un espacio métrico X es el conjunto

$$C_x = \bigcup \{A \subseteq X : x \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}.$$

Ejemplos 7.15. Veamos algunos ejemplos:

1. Si X es conexo, entonces $C_x = X$ para todo $x \in X$.
2. Las componentes conexas de $(0, 2) \setminus \{1\}$ son los intervalos $(0, 1)$ y $(1, 2)$.
3. Si X tiene la métrica discreta, entonces $C_x = x$ para todo $x \in X$.
4. $C_x = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Observación 7.16. Por el Teorema 7.9 las componentes conexas de X son cerradas, y el último ejemplo muestra que pueden no ser abiertas.

Proposición 7.17. *Para cada espacio métrico X y todo $x, y \in X$, las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. C_x es conexo y no vacío.
2. Si $x \in A$ y A es conexo, entonces $A \subseteq C_x$.
3. $C_x \cap C_y = \emptyset$ o $C_x = C_y$.
4. $X = \bigcup_{x \in X} C_x$.

Demostración. Los ítems 1 y 3 son verdaderos por el Teorema 7.11, el ítem 2, por la misma definición de C_x , y el ítem 4, porque $x \in C_x$ para todo x . \square

Definición 7.18. Un espacio métrico X es *totalmente desconexo* si todos sus subconjuntos con más de un punto son desconexos.

Ejemplos 7.19. Todo espacio métrico discreto es totalmente desconexo. También \mathbb{Q} , con la distancia usual, es totalmente desconexo.

Proposición 7.20. El conjunto de Cantor \mathcal{C} es totalmente desconexo.

Demostración. Tomemos dos puntos distintos x e y de \mathcal{C} . Por el Teorema 2.49, sabemos que x e y tienen escrituras únicas

$$x = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_h}{3^h} \quad \text{e} \quad y = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{b_h}{3^h}, \quad \text{con cada } a_h \text{ y cada } b_h \text{ igual a } 0 \text{ o } 2.$$

Supongamos que h_0 es el mínimo índice h con $a_h \neq b_h$, y escribamos $c := \frac{1}{3^{h_0}} + \sum_{h=1}^{h_0-1} \frac{a_h}{3^h}$. Como $c \notin \mathcal{C}$, cada subconjunto D de \mathcal{C} , que incluye a $\{x, y\}$ es unión de los conjuntos separados $D \cap (c, \infty)$ y $D \cap (-\infty, c)$, los que son no vacíos porque x está en uno e y en el otro. Por lo tanto D es desconexo, lo que, como x e y son arbitrarios, prueba que \mathcal{C} es totalmente desconexo. \square

Nota 7.21. Por el Ejercicio 3 de la Sección 2.2, el Ejemplo 6.16 y la Proposición 7.20 sabemos que \mathcal{C} es un espacio métrico compacto, perfecto y totalmente desconexo. Estas propiedades caracterizan topológicamente al conjunto de Cantor. En otras palabras, todo espacio métrico que las tiene es homeomorfo a \mathcal{C} .

Ejercicios

1. Pruebe el Teorema 7.7 mostrando que toda función continua de $\varphi(X)$ en $\{0, 1\}$ es constante.
2. Los ítems 1, 3 y 4 de la Proposición 7.17 dicen que las componentes conexas de X parten X . Muestre que la relación binaria \sim_c en X , definida por $x \sim_c y$ si X tiene un subconjunto conexo A tal que $x, y \in A$, es la relación de equivalencia asociada a esa partición.
3. Pruebe la proposición anterior mostrando que hay una función continua sobreyectiva $f: D \rightarrow \{0, 1\}$.
4. Pruebe que X es totalmente desconexo si y solo si $C_x = x$ para todo $x \in X$.

7.2. Espacios arco-conexos

Definición 7.22. Dados puntos x, y de un espacio métrico X , un *arco* o *camino* de x a y es una función continua $\varphi: [a, b] \rightarrow X$, de un intervalo cerrado no degenerado de \mathbb{R} en X , con $\varphi(a) = x$ y $\varphi(b) = y$. Los puntos x e y son los *extremos inicial* y *final* del arco. Decimos que x e y se *pueden unir por un arco* si existe un arco $\varphi: [a, b] \rightarrow X$, de x a y .

Observaciones 7.23. Como todos los intervalos cerrados no degenerados de \mathbb{R} son homeomorfos, el intervalo $[a, b]$ puede ser reemplazado por cualquier otro. Dados arcos $\varphi: [a, b] \rightarrow X$, de x a y , y $\psi: [b, c] \rightarrow X$, de y a z , las funciones $\tilde{\varphi}: [-b, -a] \rightarrow X$ y $\psi * \varphi: [a, c] \rightarrow X$, definidas por

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$$

y

$$\psi * \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \leq b, \\ \psi(t) & \text{si } t \geq b, \end{cases}$$

son arcos de y a x y de x a z , respectivamente. Por ende, la relación binaria \sim_{ac} en X , definida por $x \sim_{ac} y$ si existe un arco de x a y en X , es una relación de equivalencia.

Definición 7.24. Un espacio métrico X es *arco-conexo* si cada par de puntos de X se pueden unir por un arco. Un subconjunto Y de X es *arco-conexo* si lo es con la métrica inducida.

Ejemplos 7.25. Si bien toda las afirmaciones que siguen pueden comprobarse en forma directa, algunas son más fáciles de verificar apelando a resultados que daremos después en esta misma sección:

1. Un subconjunto de \mathbb{R} es arco-conexo si y solo si es un intervalo.
2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es arco-conexo si y solo si $n \geq 2$.
3. La *esfera unitaria euclideana* $S^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$ es arco-conexo para todo $n \geq 1$.

Definición 7.26. Un subconjunto A de \mathbb{R}^n es *estrellado* si tiene un punto x tal que para todo otro punto y de A , el segmento que une x con y está incluido en A . Esto es, si para todo $y \in A$, la función $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\varphi(t) := t \cdot y + (1 - t) \cdot x$, toma sus valores en A .

Ejemplo 7.27. Todo subconjunto estrellado A de \mathbb{R}^n es arco-conexo. En efecto, fijemos $x \in A$ como en la Definición 7.26. Como A es estrellado, dados puntos $y, z \in A$, existen caminos $\varphi_y: [0, 1] \rightarrow A$ y $\varphi_z: [0, 1] \rightarrow A$, que unen x con y y x con z , respectivamente. Entonces $\varphi_x * \tilde{\varphi}_z: [-1, 1] \rightarrow A$ es un camino que une z con y .

Teorema 7.28. *Todo espacio métrico arco-conexo X es conexo.*

Demostración. Por el Teorema 7.7, como los intervalos de \mathbb{R} son conexos y los arcos son funciones continuas, cada par de puntos x, y de X pertenecen a un subconjunto conexo de X . Por el Teorema 7.11 esto implica que X es conexo. \square

El siguiente ejemplo muestra que la recíproca de este resultado no vale.

Ejemplo 7.29. La *curva seno del topólogo* es el subconjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \text{sen}(1/x)\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]),$$

de \mathbb{R}^2 . Es fácil ver que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \text{sen } 1/x\}$ es arco-conexo. Por lo tanto su adherencia A es conexa. Sin embargo A no es arco-conexo. En efecto, si hubiera un arco $\varphi: [0, 1] \rightarrow A$, de $(0, 1)$ a $(1, \text{sen}(1))$, entonces este camino pasaría por todos los puntos (x, y) de A con $0 < x < 1$ (porque si no su imagen no sería conexa), pero hay infinitos de estos puntos con segunda coordenada 1 e infinitos con segunda coordenada -1 , y es imposible que todos esten en la imagen de φ , porque φ es uniformemente continua.

Teorema 7.30. *Si X es arco-conexo y $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces $f(X)$ es arco-conexo.*

Demostración. Porque si φ es un arco de x a x' en X , entonces $f \circ \varphi$ es un arco de $f(x)$ a $f(x')$ en $f(X)$. \square

Teorema 7.31. Consideremos una familia $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos arco-conexos de X . Si para cada par de puntos $x, x' \in \bigcup_{i \in I} A_i$, existen A_{i_1}, \dots, A_{i_n} tales que

$$x \in A_{i_1}, \quad x' \in A_{i_n} \quad \text{y} \quad A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset \quad \text{para todo } j,$$

entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es arco-conexo.

Demostración. Por hipótesis, dados $x, x' \in \bigcup_{i \in I} A_i$, existen puntos $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x'$ tales que para cada $i < n$ hay un camino

$$\varphi_i: [a_i, a_{i+1}] \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

de x_i en x_{i+1} . El arco $\varphi_n * \dots * \varphi_0$ va de x a x' . \square

Proposición 7.32. Un producto finito de espacios métricos es arco-conexo si y solo si todos lo son.

Demostración. Supongamos que un producto finito $X := X_1 \times \dots \times X_n$ de espacios métricos es arco-conexo. Entonces, por el Teorema 7.30, como las proyecciones canónicas $p_i: X \rightarrow X_i$ ($i = 1, \dots, n$) son funciones continuas y sobreyectivas, los X_i 's son arco-conexos. Recíprocamente, si los X_i 's son arco-conexos, entonces para cada par $x := (x_1, \dots, x_n)$ y $x' := (x'_1, \dots, x'_n)$ de puntos de X , la función $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$, dada por $\varphi(t) := (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, donde $\varphi_i: [0, 1] \rightarrow X_i$ es un arco en X_i que va de x_i a x'_i , es un arco en X que va de x a x' . \square

Corolario 7.33. \mathbb{R}^n es arco-conexo para todo $n \geq 1$.

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata de la Proposición 7.32 y el ítem 1 del Ejemplo 7.25. \square

Definición 7.34. La *componente arco-conexa* de un punto x de un espacio métrico X es el conjunto

$$C_x^{\text{arc}} = \bigcup \{A \subseteq X : x \in A \text{ y } A \text{ es arco-conexo}\}.$$

Proposición 7.35. Para cada espacio métrico X y todo $x, y \in X$ las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. C_x^{arc} es arco-conexo y no vacío.
2. $C_x^{\text{arc}} \subseteq C_x$.
3. Si $x \in A$ y A es arco-conexo, entonces $A \subseteq C_x^{\text{arc}}$.
4. $C_x^{\text{arc}} \cap C_y^{\text{arc}} = \emptyset$ o $C_x^{\text{arc}} = C_y^{\text{arc}}$.
5. $X = \bigcup_{x \in X} C_x^{\text{arc}}$.

Demostración. Los ítems 1 y 4 son verdaderos por el teorema 7.31, el ítem 2, por el Teorema 7.28, el ítem 3, por la misma definición de C_x^{arc} , y el ítem 5, porque $x \in C_x^{\text{arc}}$ para todo x . \square

Corolario 7.36. Cada componente conexa de X es unión disjunta de componentes arco-conexas.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de los ítems 2 y 4 de la Proposición 7.35. \square

Observación 7.37. A diferencia de las componentes conexas, las arco-conexas pueden no ser cerradas. Por ejemplo, las de la curva seno del topólogo son los subconjuntos $\{0\} \times [-1, 1]$, que es cerrado, y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \text{sen}(1/x)\}$, que no lo es.

Ejercicios

1. Los ítems 1, 4 y 5 de la Proposición 7.35 dicen que las componentes arco-conexas de X parten de X . Muestre que la relación binaria \sim_{ac} , definida en las Observaciones 7.23, es la relación de equivalencia asociada a esa partición. Pruebe también que $x \sim_{ac} y$ si y solo si existe un subconjunto arco-conexo A de X tal que $x, y \in A$.

7.3. Espacios localmente conexos

Definición 7.38. Un espacio métrico X es *localmente conexo* si todo punto de X tiene una base de entornos conexos. Un subconjunto de un espacio métrico es *localmente conexo* si lo es con la métrica inducida.

Definición 7.39. El *peine del topólogo* es el subconjunto

$$\text{PdT} := ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{1/n\} \times [0, 1]),$$

de \mathbb{R}^2 , con la métrica inducida.

Observación 7.40. Las propiedades de ser conexo y de ser localmente conexo son independientes. Los intervalos de \mathbb{R} son conexos y localmente conexos, los abiertos de \mathbb{R} que no son intervalos son localmente conexos pero no son conexos, el peine del topólogo es conexo pero no es localmente conexo (para cada $(0, t) \in \text{PdT}$ con $t > 0$, y cada $0 < r < t$,

$$B_r^{d_{\infty}}(0, t) \cap \text{PdT} = (\{0\} \times (t-r, t+r)) \cup \bigcup_{1/n < r} (\{1/n\} \times (t-r, t+r)),$$

que es un conjunto que no incluye a ningún entorno conexo de $(0, t)$ en PdT), y \mathbb{Q} no es conexo ni localmente conexo.

Teorema 7.41. *Un espacio X es localmente conexo si y solo si las componentes conexas de los subconjuntos abiertos de X son abiertas.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo y tomemos un abierto U de X . Si V es una componente conexa de U , entonces V es abierta, porque cada $x \in V$ tiene un entorno conexo V_x (ver la Observación 2.2). Recíprocamente, supongamos que las componentes conexas de los abiertos de X son abiertas y tomemos un $x \in X$. Una base de entornos abiertos conexos de x se obtiene seleccionando una base cualquiera $\{U_{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, de entornos abiertos de x , y tomando para cada λ la componente conexa $V_{\lambda}(x)$ de U_{λ} , que contiene a x . \square

Corolario 7.42. *Un espacio métrico X es localmente conexo si y solo si cada punto $x \in X$ tiene una base de entornos abiertos conexos.*

Demostración. Esto fue probado en la demostración del Teorema 7.41. Para quienes objetan (con razón) que un corolario de un teorema debería ser un corolario del enunciado, y no de la demostración, damos la siguiente prueba: por el Teorema 7.41, para cada $x \in X$, el conjunto $\{V_r(x) : r \in (0, \infty)\}$, donde $V_r(x)$ es la componente conexa de $B_r(x)$ que contiene a x , es una base de entornos abiertos conexos de x . \square

Ejercicios

1. Pruebe que el peine del topólogo no es localmente conexo.
2. Pruebe que la curva seno del topólogo no es localmente conexa.
3. Pruebe que un producto finitos de espacios métricos es localmente conexo si y solo si cada uno de ellos lo es.

7.4. Espacios localmente arco-conexos

Definición 7.43. Un espacio métrico X es *localmente arco-conexo* si todo punto de X tiene una base de entornos arco-conexos. Un subconjunto de un espacio métrico es *localmente arco-conexo* si lo es con la métrica inducida.

Ejemplo 7.44. Los espacios discretos son localmente arco-conexos y como las bolas abiertas de \mathbb{R}^n son arco-conexas, también los abiertos de \mathbb{R}^n son localmente arco-conexos.

Observación 7.45. Los mismos ejemplos que los considerados en la Observación 7.40, muestran que las propiedades de ser arco-conexo y de ser localmente arco-conexo son independientes.

Teorema 7.46. *Un espacio X es localmente arco-conexo si y solo si las componentes arco-conexas de los subconjuntos abiertos de X son abiertas.*

Demostración. Copiese la prueba del Teorema 7.41, cambiando conexo por arco-conexo en todas partes. □

Corolario 7.47. *Un espacio métrico X es localmente arco-conexo si y solo si cada punto $x \in X$ tiene una base de entornos abiertos arco-conexos.*

Demostración. Por el Teorema 7.46, para cada $x \in X$ el conjunto $\{V_r(x) : r \in (0, \infty)\}$, donde $V_r(x)$ es la componente arco-conexa de $B_r(x)$ que contiene a x , es una base de entornos abiertos arco-conexos de x . □

Teorema 7.48. *En todo espacio métrico localmente arco-conexo, las componentes conexas y las componentes arco-conexas coinciden.*

Demostración. Por la Proposición 7.36 sabemos que cada componente conexa C_x de X es unión disjunta de componentes arco-conexas. Como, por el Teorema 7.46, estas son abiertas, y C_x es conexo, necesariamente $C_x^{\text{arc}} = C_x$. □

Corolario 7.49. *Todo espacio métrico conexo y localmente arco-conexo es arco-conexo.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del teorema anterior. □

Ejercicios

1. Pruebe que la esfera unitaria euclideana S^n es un espacio localmente arco-conexo para cada $n \geq 0$.