Práctica 5: Espacios L^p

Ejercicio 1. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$.

(a) Probar que si $|E| < \infty$, entonces $L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E)$.

(b) Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede no valer si $|E| = +\infty$.

(c) Mostrar que si vale la inclusión de (a), entonces $|E| < +\infty$.

Ejercicio 2. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible de medida finita y $f : E \to \mathbb{C}$ medible.

(a) Probar que:
$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$

(b) Mostrar que eso puede ser falso si la medida de E es infinita.

Ejercicio 3. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medibles, $1 \leq p \leq \infty$ y $1/p + 1/p' = 1$. Probar que
$$\|f\|_p = \sup \int_E f(x)g(x)dx,$$
donde el supremo se toma sobre todas las funciones $g : E \to \mathbb{R}$ medibles tales que $\int_E f(x)g(x)dx$ existe y $\|g\|_{p'} \leq 1$.

Ejercicio 4. Probar que el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Probar que el espacio $L^p(E)$ es completo.

(b) Decidir para qué valores de p el espacio $L^p(E)$ es separable.

Ejercicio 6. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, y $h \in \mathbb{R}^n$, definimos la función f_h por $f_h(x) := f(x-h), (x \in \mathbb{R}^n)$. Probar que $f_h \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $h \to 0$. ¿Es esto cierto para $p = \infty$?

Ejercicio 7.

(a) Mostrar que la función $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida a continuación es C^∞.
$$h(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|_2^2}} & , \text{ si } |x|_2 < 1, \\ 0 & , \text{ si } |x|_2 \geq 1. \end{cases}$$

(b) Probar que si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y alguna de las dos funciones tiene soporte compacto, entonces $sop(f * g) \subseteq sop(f) + sop(g)$. ¿Qué ocurre si ninguna de las funciones tiene soporte compacto? Concluir que si f y g tienen ambas soporte compacto, entonces $f * g$ también.

(c) Probar que si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ son abiertos tales que $\overline{A} \subseteq B$ y A es acotado, entonces existe una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de clase C^∞ y de soporte compacto tal que $f \equiv 1$ en A y $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B$.

Ejercicio 8. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $1 \leq r \leq p \leq s < \infty$. Probar que si $f \in L^r(E) \cap L^s(E)$ entonces $\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^r + \|f\|_s^s$.

Ejercicio 9. Probar que:

(a) Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$ para algún p $(1 \leq p \leq \infty)$, entonces $f_n \overset{m}{\to} f$ sobre E.

(b) Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$, $g_n \to g$ en $L^q(E)$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $f_n g_n \to fg$ en $L^1(E)$.

(c) Si $|E| < \infty$ y $f_n \to f$ en $L^\infty(E)$, entonces $f_n \to f$ en $L^p(E)$, para todo $p \geq 1$.

Ejercicio 10. Dadas las funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

probar que $f_n \to 0$ a.e. y $f_n \overset{m}{\to} 0$, pero f_n no converge en $L^p([0, 1])$ para ningún p con $1 \leq p \leq \infty$.

Ejercicio 11. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y p tal que $1 \leq p < +\infty$. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y f en $L^p(E)$. Probar que

(a) $\|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_{L^p(E)} \to \|f\|_{L^p(E)}$.

(b) Si $f_n \to f$ a.e. sobre E, entonces

$$\|f_n\|_{L^p(E)} \to \|f\|_{L^p(E)} \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(E)} \to 0.$$

Sugerencia: Aplicar el Lema de Fatou a la sucesión

$$g_n(x) = 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) - |f_n(x) - f(x)|^p.$$

Ejercicio 12. Sea $k : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ medible tal que existe $c > 0$ que verifica:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int |k(x, y)| dy \leq c \quad \text{y} \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int |k(x, y)| dx \leq c.$$

Probar que si $1 < p < +\infty$, entonces $K : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$K(f)(x) = \int k(x, y) f(y) dy$$

está bien definida y es uniformemente continua.

Ejercicio 13. Para $1 \leq p < +\infty$ y $0 < |E| < +\infty$, definimos:

$$N_p[f] = \left(\frac{1}{|E|} \int_E |f|^p \right)^{1/p}.$$

Probar que

(a) $p_1 < p_2 \;\Rightarrow\; N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$.

(b) $N_p[f+g] \leq N_p[f] + N_p[g]$.

(c) $\frac{1}{|E|} \int_E |fg| \leq N_p[f] N_{p'}[g],\; 1/p + 1/p' = 1$.

(d) $\lim_{p \to +\infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 14. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible con $0 < |E| < +\infty$ y $f \in L^\infty(E)$ que verifica $\|f\|_\infty > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos $a_k = \int_E |f(x)|^k dx$. Demostrar que $\lim_{k \to +\infty} a_{k+1}/a_k = \|f\|_\infty$.

Ejercicio 15. Supongamos que $f_n \to f$ a.e. y que $f_n, f \in L^p,\; 1 < p < \infty$. Si $\|f_n\|_p \leq M < \infty$, demostrar que $\int f_n g \to \int fg$, para toda $g \in L^{p'},\; 1/p + 1/p' = 1$. ¿Es cierto este resultado para $p = 1$?

Ejercicio 16. Si $f_n \to f$ en $L^p,\; 1 \leq p < +\infty,\; g_n \to g$ puntualmente y $\|g_n\|_\infty \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, probar que $f_n g_n \to fg$ en L^p.

Ejercicio 17. Demuestre la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder.
Si $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{r}$ con $p_i, r \geq 1$, entonces

$$\|f_1 \cdots f_k\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}$$

Ejercicio 18. Muestre que cuando $0 < p < 1$, los entornos $\{f \in L^p(0,1) : \|f\|_p < \varepsilon\}$ de 0, no son convexos.

Ejercicio 19. Sea f tal que para todo $\alpha > 0$,

$$\omega(\alpha) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}| \leq c(1+\alpha)^{-p}.$$

Probar que $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para $0 < r < p$.

Ejercicio 20. Sea p con $0 < p < +\infty$. Probar que $f \in L^p$ si y sólo si

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) < +\infty.$$

Probar, además, que existen constantes positivas c_1 y c_2 que no dependen de f tales que

$$c_1 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) \right)^{1/p} \leq \|f\|_p \leq c_2 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \omega(2^k) \right)^{1/p}$$

Ejercicio 21. Sea $E = [0, 1/2]$. Probar que

(a) $f(x) = x^{-1/p}(\ln x^{-1})^{-2/p} \in L^p(E)$, $(1 \leq p < +\infty)$, pero $f \notin L^r(E)$ si $r > p$.

(b) $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(E)$ para todo p con $1 \leq p < +\infty$, pero $g \notin L^\infty(E)$.

Ejercicio 22. Sea $E = [0, +\infty)$. Probar que $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(E)$ pero $f \notin L^p(E)$ para ningún p tal que $1 \leq p < +\infty$ y $p \neq 2$.

Ejercicio 23. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < +\infty$, probar que:

(a) $\displaystyle \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx \right)^{1/p} \underset{\|h\| \to +\infty}{\longrightarrow} 2^{1/p} \|f\|_p$

(b) $\displaystyle \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) + f(x)|^p dx \right)^{1/p} \underset{\|h\| \to 0}{\longrightarrow} 2 \|f\|_p$

Ejercicio 24.

(a) Dadas funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ donde $1/p + 1/p' = 1$, probar que la convolución $f * g(x)$ existe y es finita para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Probar, además, que define una función acotada y uniformemente continua.

(b) Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $0 < |E| < +\infty$, probar que

$$E - E = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un conjunto abierto no vacío.

Sugerencia: Considerar $\chi_E * \chi_{-E}$.

Ejercicio 25. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable, para cada $h > 0$ sea

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x) dx.$$

Si $f \in L^p$, probar que

(a) $\|f_h\|_\infty \leq h^{-1/p} \|f\|_p$.

(b) $f_h \in L^p$ y $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.

(c) Para cada $r \geq p \geq 1$, $\|f_h\|_r \leq h^{1/r - 1/p} \|f\|_p$.

(d) Si $p < \infty$, $\|f_h - f\|_p \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ejercicio 26. Sean $1 < p < +\infty$, $1/p + 1/p' = 1$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Probar que si $(f_k)_{k \geq 1}$ es una sucesión de funciones de L^p tal que para toda $g \in L^{p'}$ vale que $\lim\limits_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f g dx$, entonces $\|f\|_p \leq \liminf_{k \to +\infty} \|f_k\|_p$.

Ejercicio 27. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $p \geq 1$. Definimos:

$$L^p_*(E) = \{f : E \to \overline{\mathbb{R}} \text{ medible} : \sup_{t > 0} t \left(|\{x \in E : |f(x)| > t\}|\right)^{1/p} < +\infty\}.$$

Probar que

(a) $L^p(E) \subseteq L^p_*(E)$,

(b) si $|E| < +\infty$ y $p > 1$, entonces $L^p_*(E) \subseteq L^1(E)$.

Ejercicio 28. Dados $[a, b]$ un intervalo acotado y $f \in L^p([a, b])$ $1 < p < +\infty$, definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \qquad , \qquad x \in [a, b].$$

Probar que existe una constante K tal que para toda partición
$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ resulta:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|F(x_{i+1}) - F(x_i)|^p}{(x_{i+1} - x_i)^{p-1}} \leq K.$$