

## PRÁCTICA 2: FUNCIONES MEDIBLES

**Ejercicio 1.** Sea  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Probar que

- (a) Si  $f$  es medible entonces  $f^{-1}(B)$  es medible para todo  $B \in \mathcal{B}$ .
- (b) Si  $\overline{\mathcal{B}} = \{E = B \cup A, B \in \mathcal{B} \text{ y } A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$  entonces  $f$  es medible si y sólo si  $f^{-1}(E)$  es medible para todo  $E \in \overline{\mathcal{B}}$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medibles. Mostrar que los conjuntos  $\{f > g\}$  y  $\{f = g\}$  son medibles.

**Ejercicio 3.**

- (a) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$  es medible. ¿Es  $f$  medible?
- (b) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|f|$  es medible. ¿Es  $f$  medible?

**Ejercicio 4.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Probar que si  $f$  es monótona, entonces  $f$  es medible Borel.
- (b) Probar que si  $f$  es derivable sobre  $\mathbb{R}$ , entonces  $f'$  es medible Borel.

**Ejercicio 5.** Probar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es medible, entonces existe  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medible Borel tal que  $f = g$  a.e.

**Ejercicio 6.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  continua en casi todo punto. Probar que  $f$  es medible.

**Ejercicio 7.**

- (a) Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua a.e. tal que no exista  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua que verifique  $f = g$  a.e.
- (b) Hallar  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g$  sea continua,  $f = g$  a.e. y  $f$  sea discontinua en todo punto.

**Ejercicio 8.** Sea  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}^n$ .

- (a) Sea  $E \subseteq I$  medible. Probar que para cada  $\epsilon > 0$  existe  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que

$$|\{x \in I : g(x) \neq \chi_E(x)\}| < \epsilon.$$

(b) Sea  $\varphi$  una función simple definida sobre  $I$ . Probar que para cada  $\epsilon > 0$  existe  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que

$$|\{x \in I : g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$

(c) Sea  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medible y finita en c.t.p. Probar que dados  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  existe  $\varphi$  simple tal que

$$|\{x \in I : |\varphi(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

(d) Sea  $f$  como en (c). Probar que dados  $\epsilon > 0$  y  $\delta > 0$  existe  $g$  continua tal que

$$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

**Ejercicio 9.** Sea  $E$  medible y  $(f_k)_{k \geq 1} : E \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones medibles tal que para todo  $x \in E$  existe  $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $|f_k(x)| \leq M_x \forall k \in \mathbb{N}$ . Probar que si para todo  $\alpha > 0$  existe  $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$  tal que

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}| \leq \alpha/k,$$

entonces  $|E| = 0$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $E$  de medida finita y  $(f_k)_{k \geq 1} : E \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones medibles tal que para todo  $x \in E$  existe  $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $|f_k(x)| \leq M_x \forall k \in \mathbb{N}$ . Probar que para todo  $\epsilon > 0$  existen  $F \subseteq E$  cerrado y  $M \in \mathbb{R}_{>0}$  tales que

$$|E \setminus F| < \epsilon \quad \text{y} \quad |f_k(x)| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in F.$$

**Ejercicio 11.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_n(x) = n\chi_{[1/n, 2/n]}(x)$ . Probar que

- (a)  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge puntualmente.
- (b) Para cada  $\delta > 0$ ,  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente en  $[\delta, \infty)$ .
- (c) No existe  $E \subset [0, \infty)$  tal que  $|E| = 0$  y  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformemente en  $E^c$ .

**Ejercicio 12.**

(a) Sea  $E$  de medida finita y sean  $(f_n)_{n \geq 1}, f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funciones medibles, finitas en casi todo punto de  $E$  y tales que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$  a.e. en  $E$ . Probar que existe una sucesión  $(E_i)_{i \geq 1}$  de conjuntos medibles de  $E$  tal que

$$(i) \quad |E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i| = 0,$$

$$(ii) \quad \text{Para cada } i \geq 1, f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \text{ en } E_i.$$

- (b) Probar que el mismo resultado vale si  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  donde  $A_k$  es de medida finita para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 13.** Sean  $(f_n)_{n \geq 1}$  y  $f$  funciones medibles definidas sobre un conjunto  $A$  y finitas en casi todo punto. Sea  $(A_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de subconjuntos de  $A$  medibles, tales que  $|A \setminus A_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Probar que si  $\chi_{A_n} f_n \xrightarrow{m} f$  entonces  $f_n \xrightarrow{m} f$ .

**Ejercicio 14.** Supongamos que  $f_k \xrightarrow{m} f$  y  $g_k \xrightarrow{m} g$  sobre  $E$ .

- (a) Probar que  $f_k + g_k \xrightarrow{m} f + g$  sobre  $E$ .
- (b) Probar que si  $|E| < +\infty$ , entonces  $f_k g_k \xrightarrow{m} f g$  sobre  $E$ . Mostrar que la hipótesis  $|E| < +\infty$ , no puede quitarse.
- (c) Sea  $(\frac{f_k}{g_k})_{k \geq 1}$  una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de  $E$ . Probar que si  $|E| < +\infty$ ,  $g_k \rightarrow g$  sobre  $E$  y  $g \neq 0$  a.e., entonces  $\frac{f_k}{g_k} \xrightarrow{m} \frac{f}{g}$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  la función de Cantor-Lebesgue y  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$  definida por  $f(x) = f_1(x) + x$ .

- (a) Probar que  $f$  es continua y biyectiva y que  $f^{-1}$  es continua.
- (b) Probar que si  $C$  es el Ternario de Cantor,  $|f(C)| = 1$ .
- (c) Sea  $g = f^{-1}$ . Mostrar que existe  $A$  medible tal que  $g^{-1}(A)$  es no medible.
- (d) Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.
- (e) Hallar  $h_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  medible Borel y  $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  medible tal que  $h_2 \circ h_1$  no es medible.

**Ejercicio 16.** Probar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es s.c.s. (resp. s.c.i., resp. continua) entonces  $f$  es medible Borel.