**Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2018**

PRÁCTICA 8

CÁLCULO FUNCIONAL CONTINUO

1. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador normal. Probar que $T$ es unitario si y sólo si $\sigma(T) \subseteq S^1$.

2. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador positivo. Probar que $T$ es inversible si y sólo si existe $\varepsilon$ tal que $\varepsilon \cdot id \leq T$. Concluir que si $0 \leq S \leq R$ son operadores y $S$ es inversible, entonces $R$ también.

3. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador inversible. Probar que existe una función continua $\gamma : [0,1] \to \mathrm{GL}(\mathcal{H})$ tal que $\gamma(0) = T$ y $\gamma(1)$ es un operador unitario.

   *Bonus Track:* Concluir que si $\mathcal{U}(H)$ es el conjunto de operadores unitarios, entonces $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es un retracto por deformación de $\mathrm{GL}(\mathcal{H})$.

4. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador positivo tal que $\|P^2 - P\| \leq \delta < 1/4$. Probar que existe una proyección $\widetilde{P}$ tal que $\|\widetilde{P} - P\| \leq 2\delta$.

5. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T$ un operador normal tal que para todo número natural $n \geq 1$ entonces $\|T \pm in\|^2 = n^2 + 1$. Probar que $T$ es autoadjunto y $\|T\| \leq 1$.