Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2018

Práctica 7

Teoría espectral. Álgebras de Banach.

Cálculo funcional continuo para operadores compactos

1. Sea X un espacio de medida finita y $\varphi \in L^\infty(X)$. Sea $M_\varphi \in \mathcal{L}(L^p(X))$ el operador de multiplicación asociado.

   a) Calcular $\sigma(M_\varphi)$.

   b) Probar que λ es autovalor de M_φ si y sólo si $\mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$.

2. Sea $S \in \mathcal{L}(\ell^p)$ el operador de shift. Calcular $\sigma(S)$.

   Sugerencia: tal vez sea útil también intentar calcular $\sigma(S^*)$.

3. Sea H un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$. Probar que :

   a) si A es autodjunto, entonces $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$,

   b) si A es unitario, entonces $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

4. Sea $1 < p < \infty$ y $T : \ell^p \to \ell^p$ dado por

   $$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \ldots).$$

   Calcular $\sigma(T)$. ¿Es T compacto?.

5. Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra dado por

   $$(Vf)(x) = \int_0^x f(y)\, dy.$$

   Calcular $\sigma(V)$.

6. Sea E un espacio de Banach y $A \in \mathcal{L}(E)$. Decimos que λ es un *autovalor aproximado* si existe una sucesión $(x_n) \subset E$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|\lambda x_n - Ax_n\| \to 0$.

   a) Probar que si λ es un autovalor aproximado entonces $\lambda \in \sigma(A)$.

   b) Probar que si $\lambda \in \partial\sigma(A)$ entonces es autovalor aproximado.

   c) Probar que si $\lambda \in \sigma(A)$ no es autovalor aproximado, entonces $\overline{\lambda}$ es autovalor aproximado de A^*.

Álgebras de Banach

Definición:

- Un *álgebra de Banach* $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach junto con una multiplicación $m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (que notamos como es usual $m(a,b) = a \cdot b$) con las siguientes propiedades

  - Para todos a, b y $c \in \mathcal{A}$

    $$(ab)c = a(bc)$$

- Para todos $a, b \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \Bbbk$ en el cuerpo base
$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$
- Para todos a, b y $c \in \mathcal{A}$
$$a(b + c) = ab + ac,$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$
- Para todo $a, b \in \mathcal{A}$ se tiene
$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|;$$
en particular, la multiplicación es conjuntamente continua para la topología de la norma.

- Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ de dice *unital* si existe un único elemento $1_{\mathcal{A}}$ tal que para todo $a \in \mathcal{A}$ vale
$$1_{\mathcal{A}}a = a1_{\mathcal{A}} = a$$
y $\|1_{\mathcal{A}}\| = 1$.
- Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital, un elemento $a \in \mathcal{A}$ se dice *inversible a izquierda* (respectivamente, *a derecha*) si existe $b \in \mathcal{A}$ tal que
$$ba = 1_{\mathcal{A}} \qquad (\text{resp. } ab = 1_{\mathcal{A}}).$$
El elemento b se lo llama un *inverso a izquierda* (resp. *a derecha*). Si un elemento a es inversible a izquierda y a derecha, se dice *inversible* y en ese caso, su inverso a cada lado coinciden y es único con dicha propiedad, se lo nota con a^{-1}.
- Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital y $a \in \mathcal{A}$. El espectro de a (en $\mathcal{A}$) es
$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \Bbbk : (\lambda 1_{\mathcal{A}} - a) \text{ no es inversible en } \mathcal{A}\}.$$
Cuando el álgebra $\mathcal{A}$ está clara del contexto, la omitimos de la notación $\sigma_{\mathcal{A}} = \sigma$.

7. Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Observar que $C(X)$ es un álgebra de Banach unital. Dada dada una $f \in C(X)$ determinar $\sigma(f)$.

8. (Teorema de Gelfand-Mazur) Sea $\mathcal{A}$ un $\mathbb{C}$-álgebra de Banach unital en la que todo elemento no nulo es inversible. Probar que $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.

   Sugerencia: Calcular $\sigma(a)$.

9. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a, b \in \mathcal{A}$. Probar que $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$.

10. Sean $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach, $a \in \mathcal{A}$ y $U \supseteq \sigma(a)$ un abierto de $\mathbb{C}$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que si $\|a - b\| < \delta$ entonces $\sigma(b) \subseteq U$.

11. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach y $a \in \mathcal{A}$. Definimos
$$e^a := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}.$$
   a) Probar que si $b \in \mathcal{A}$ conmuta con a, entonces vale la fórmula $e^{a+b} = e^a e^b$.
   b) Probar que e^a es inversible.
   c) Probar que si H es un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert, $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ y a es autoadjunto, entonces e^a es positivo y e^{ia} es unitario.

Teorema espectral y cálculo funcional para operadores compactos normales

12. Sean H un espacio de Hilbert, T un operador compacto normal. Probar que para toda $f \in C(\sigma(T))$ se tiene que
$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$
Concluir que $f(T)$ es compacto si y sólo si $f(0) = 0$.

13. Sea H un espacio de Hilbert y $S \in \mathcal{L}(H)$ que conmuta con un operador compacto normal. Probar que entonces existe un subespacio de dimensión finita $H_0 \neq 0$ tal que $S(H_0) \subseteq H_0$.

14. Sean H un espacio de Hilbert y $(T_n)_n \subseteq \mathcal{K}(H)$ una sucesión operadores compactos normales tal que $T_n \to T$. Sean $K \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto compacto tal que $\sigma(T_n), \sigma(T) \subseteq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C(K)$. Probar que $f(T_n) \to f(T)$.

15. Sean H un espacio de Hilbert y $S, T \in \mathcal{K}(H)$ normales. Probar que existe un operador unitario $U \in \mathcal{L}(H)$ tal que $USU^* = T$ si y sólo si $\dim\ker(\lambda - S) = \dim\ker(\lambda - T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

16. Sean $(H_n)_n$ una sucesión de espacios de Hilbert y $T_n \in \mathcal{K}(H_n)$ con $\|T_n\|$ uniformemente acotada.

    a) Probar que $\widehat{T} = \oplus_n T_n \in \mathcal{K}(\widehat{\bigoplus}_n H_n)$ definido por $\widehat{T}((x_n)) = (T_n(x_n))$ es compacto si y sólo si $T_n \to 0$.

    b) Calcular $\sigma(\widehat{T})$ con respecto a $\sigma(T_n)$.

    c) Si cada T_n es normal, probar que $\widehat{T}$ es normal. ¿Qué relación hay entre $f(T)$ y $f(T_n)$?