Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2018

PRÁCTICA 6

OPERADORES COMPACTOS Y FREDHOLM.

1. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Probar que T es $w-\|\cdot\|$-secuencialmente continua. Probar que si E es reflexivo entonces vale la recíproca y más aún $T(B_E)$ es cerrado.

2. Sean E y F espacios de Banach, $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Probar que $\mathrm{Im}T$ es separable.

3. Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Consideremos el operador de multiplicación $M_\alpha : \ell^p \to \ell^p$ dado por $M_\alpha(x) = (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para $1 < p < \infty$. Probar que M_α es compacto si y sólo si $\alpha_n \to 0$.

4. Sean E y F espacios de Banach de dimensión infinita y $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

   a) Sea $S \subset \mathrm{Im}T$ un subespacio cerrado. Probar que $\dim S < \infty$.

   b) Probar que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ tal que $\|x_n\| = 1$ para todo n y que $T(x_n) \to 0$. *Sugerencia:* Recordar que si T es acotado inferiormente entonces tiene imagen cerrada.

5. Sea E un espacio de Banach reflexivo separable. Probar que todo operador $T : E \to \ell_1$ es compacto. Concluir que todo operador $S : c_0 \to E$ es compacto.

6. Probar que la inclusión $i : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ es compacta. Concluir que que la inclusión $i : C^\alpha([0,1]) \to C^\beta([0,1])$ es compacta si y sólo si $\alpha > \beta$.

7. Sean $k \in C([a,b]\times[a,b])$ y $K : C[a,b] \to C[a,b]$ el operador integral con núcleo k, dado por
$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$$
   Probar que K es un operador lineal acotado y compacto. ¿Qué sucede si se reemplaza $[a,b]$ por $\overline{U}$ con U abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$?

8. Sean E y F espacios de Banach. Supongamos que F satisface la siguiente propiedad: para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $K \subseteq F$ conjunto compacto, existe $T \in \mathcal{L}_{00}(F)$ y
$$\sup_{x\in K} \|Tx - x\| < \varepsilon$$
   Probar que $\mathcal{K}(E,F) = \overline{\mathcal{L}_{00}(E,F)}$.

9. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{K}(E)$ y $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Probar que $\ker(T - \lambda id)$ tiene dimensión finita y $\mathrm{Im}(T-\lambda id)$ es cerrado.

   Sugerencia: Para ver que tiene dicho núcleo tiene dimensión finita, suponer que no y usar el Lema de Riesz. Para ver que la imagen es cerrada, cocientar por el núcleo y ver que el operador cociente está acotado inferiormente.

   Definición: Sea E un espacio de Banach. Definimos en $\mathcal{L}(E)$ la *topología fuerte de operadores* o SOT (por sus siglas en inglés) como la topología en la que una red $\{T_\lambda\}$ converge a T si y sólo si $\|T_\lambda(x) - T(x)\| \to 0$ para todo $x \in E$.

10. Sean E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{K}(E)$. Consideremos el operador lineal $R_T : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ dado por $R_T(A) = AT$. Probar que R_T es continuo en norma y es secuencialmente-SOT- $\|\cdot\|$-continuo. Analizar otras posibles continuidades ($\|\cdot\|$-SOT, SOT-SOT, continuidad sobre acotados, etc.)

11. Sean H un espacio de Hilbert y $\mathcal{B}$ un conjunto ortonormal. Llamamos $S = \overline{span\{B\}}$. Si M es un subespacio de H notamos como P_M a la proyección ortogonal de H en M. Probar que para todo operador compacto $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ se tiene que

$$\sum_{e \in B} TP_{\langle e \rangle} = TP_S.$$

(Dicha serie converge en la topología de la norma). Concluir que todo operador compacto en un espacio de Hilbert es límite de operadores de rango finito.

Operadores de Fredholm

Definición: Sean E, F espacios de Banach, $S \subseteq E$ un subespacio cerrado y $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Llamamos *codimensión* de S en E a

$$\text{codim}S := \dim E/S.$$

- Se dice que T es un *operador de Fredholm* si:
  - $\dim(\ker T)$ es finita.
  - $\text{Im}T$ es cerrado y $\text{codim}(\text{Im}T)$ es finita.

  Notamos como $\mathcal{F}(E, F)$ al conjunto de operadores de Fredholm.
- Si T es un operador de Fredholm, el *índice de* T a

$$\text{Ind}T := dim(\ker T) - \text{codim}(\text{Im}T) \in \mathbb{Z}.$$

12. Sean E, F espacios de Banach y sea $T : E \to F$ un operador de Fredholm, probar que

$$\text{Ind}T = \dim(\ker T) - \dim(\ker T^*).$$

13. Sea E un espacio de Banach y $K \in \mathcal{K}(E)$.

    a) Probar que $id + K$ es inyectivo si y sólo si es sobreyectivo.
    Sugerencia: Usar el ejercicio 9.

    b) Probar que $\text{Ind}(id + K) = 0$.
    Sugerencia: Usar el item anterior para $id + K + F$ donde F es de rango finito.

14. Sean E, F espacios de Banach, $T : E \to F$ un operador de Fredholm.

    a) Supongamos que $\ker(T^*) = 0$. Probar que la ecuación $Tx = y$ tiene por lo menos una solución para cualquier $y \in F$.

b) Supongamos que $\mathrm{Ind}T = 0$. Probar que la ecuación $Tx = y$ tiene solución para *todo* y si y sólo si *en el caso que tuviese solución* para algún y, la solución es única.

15. Probar que la ecuación integral $f(x) - \displaystyle\int_0^\pi \sin(x+y) f(y)\, dy = g(x)$ tiene solución única para toda $g \in L^2[0,\pi]$.

16. Sean $S, T : \ell^2 \to \ell^2$ los operadores de shift y coshift.

    a) Probar que son operadores de Fredholm y calcular sus índices.

    b) Repetir lo anterior para los operadores S^k y T^k.