Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2018

Práctica 5

Espacios de Hilbert.

1. Sean H es un espacio vectorial y $a : H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal y hermitiana. Probar que vale la *formula de polarización*

$$a(x,y) = \frac{1}{4}\left\{a(x+y,x+y) - a(x-y,x-y) + i\left[a(x+iy,x+iy) - a(x-iy,x-iy)\right]\right\}$$

En particular, si $a = \langle\, ,\rangle$ es un producto interno:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)\right\}$$

2. Sea E un espacio de Banach. Probar que existe un producto interno que induce la norma de E (y que hace de E un espacio de Hilbert) si y sólo si la norma verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Concluir que los espacios ℓ^p con $p \neq 2$ y $C[0,1]$ no son espacios de Hilbert (con sus normas usuales).

3. Sea E un espacio de Banach tal que para todo $S \subseteq E$ subespacio de dimensión 2, S es isométricamente isomorfo a un subespacio de un espacio Hilbert H_S. Probar que E es un espacio de Hilbert (es decir, su norma proviene de un producto interno).

4. (Ortogonalización de Gram-Schmidt) Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $\{b_n\}_n$ es un subconjunto linealmente independiente de H que genera un subespacio denso en H.

   a) Definamos $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ e inductivamente definimos

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle b_{n+1}, e_k\rangle e_k}{\left\|b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle b_{n+1}, e_k\rangle e_k\right\|}$$

   Probar que $\{e_n\}_n$ es una base de H.

   b) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $span(\{f_1,\dots,f_k\}) = span(\{b_1,\dots,b_k\})$. Probar que existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números complejos de módulo 1 tal que $f_n = \alpha_n\, e_n$.

   Bonus de cuentas:

   El conjunto $\{1, x, x^2, \dots\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2[-1,1]$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que

$$e_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \underbrace{\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (x^2-1)^n}_{=P_n}$$

donde P_n son los polinomios de Legendre.

El conjunto $\{x^n e^{-x^2/2} : n \in \mathbb{N}_0\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2(-\infty, \infty)$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface que

$$h_n(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi}2^n n!} \underbrace{(-1)^n \, e^{x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n e^{-x^2}}_{=H_n}$$

donde $H_n(x) =$ son los polinomios de Hermite. Las funciones $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son conocidas como las funciones de Hermite.

5. Sea H un espacio de Hilbert y sea $\mathcal{B}$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

   a) $\mathcal{B}$ es base.

   b) El conjunto $\mathcal{B}$ satisface la siguiente propiedad: si $x \in H$ tal que $x \perp e$ para todo $e \in \mathcal{B}$, entonces $x = 0$.

   c) $span(\mathcal{B})$ es denso.

6. Probar que los siguientes conjuntos son base de sus respectivos espacios.

   a) $\mathcal{B} = \{e^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^2$ dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$.

   b) $\mathcal{B} = \{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\ \} \subseteq L^2[-\pi, \pi]$.

   c) $\mathcal{B} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^2[-1, 1]$ en el caso real.

7. Sean H un espacio de Hilbert, $\mathcal{B}$ una base de H e I un conjunto de igual cardinal que $\mathcal{B}$. Probar que H es isométricamente isomorfo a

$$\ell^2(I) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} : \sum_{i\in I} |f(i)|^2 < \infty \right\}.$$

   Concluir que todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita es isométricamente isomorfo a ℓ^2.

8. Sea H un espacio de Hilbert. Probar que existen subespacios cerrados separables de dimensión infinita $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que

$$H = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda.$$

9. Sea $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios de Hilbert. Definimos el espacio

$$\mathcal{H} = \widehat{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}} H_n = \left\{ (x_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n : \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{H_n}^2 < \infty \right\}$$

   Probar que la función sesquilineal

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x_n, y_n \rangle_{H_n}$$

está bien definida sobre $\mathcal{H}$ y es un producto interno que hace de $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Probar además que con dicho producto interno cada $H_n \subseteq \mathcal{H}$ es cerrado y $H_n \perp H_m$ si $n \neq m$. Al espacio $\mathcal{H}$ se lo llama *la suma directa de espacios de Hilbert.* Observar que si todos los H_n son separables y H_1 (por fijar alguno) es de dimiensión infinita, entonces $\mathcal{H} \cong H_1$ como espacios de Hilbert. ¿Cómo definiría algo similar si tuviese un continuo $\{H_t\}_{t\in[0,1]}$? ¿Y si asume más regularidad de la familia $\{H_t\}$?

10. Sea H un espacio de Hilbert separable y $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que una función $f : X \to H$ es medible si $x \mapsto \langle f(x), h\rangle$ es una función medible (a valores en $\mathbb{C}$) para todo $h \in H$.

    a) Probar que si f es medible, entonces $\|f\|$ es medible.

    b) Sea $f : X \to H$ es medible tal que $\|f\| \in L^1(X)$. Probar que existe un único $I \in H$ tal que para todo $h \in H$

    $$\langle I, h\rangle = \int_X \langle f(x), h\rangle \, \mathrm{d}\mu$$

    Definición: Al vector I lo llamamos *la integral de* f y lo notamos

    $$I = \int_X f \mathrm{d}\mu$$

    Notamos como $L^p(X, H)$ al espacio de Banach dado por

    $$L^p(X, H) = \{f : X \to H : \ f \text{ es medible y } \|f\| \in L^p(X)\}$$

    con la norma $\|f\|_{L^p(X,H)} = \|\|f\|_H\|_{L^p(X)}$.

    c) Probar que el operador integrar

    $$\begin{aligned} L^1(X, H) &\longrightarrow H \\ f &\longmapsto \int_X f \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

    es lineal y continuo.

    d) Si p y q son conjugados armónicos, probar que el operador sesquilineal

    $$\begin{aligned} L^p(X, H) \times L^q(X, H) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longmapsto \int_X \langle f, g\rangle \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

    es continuo. Concluir que $L^2(X, H)$ es un espacio de Hilbert.

11. Sean H un espacio de Hilbert y $B : H \to H^*$ el isomorfismo isométrico con su espacio dual, inducido por el producto interno y $S \subseteq H$. Probar que $B(S^\perp) = ann(S)$ y que $preann(B(S)) = S^\perp$.

12. Sean H un espacio de Hilbert, $S \subset H$ un subespacio cerrado propio y $T \subseteq H$ un subespacio.

    a) Probar que existe $x \in H \setminus S$ tal que $x \perp S$.

b) Probar que $S \oplus S^{\perp} = H$. Concluir que $(S^{\perp})^{\perp} = S$

c) Probar que H/S es un espacio de Hilbert y que $H/S \cong S^{\perp}$.

d) Dar contraejemplos de los anteriores de si S no es cerrado.

e) Probar que $T^{\perp} = 0$ si y sólo si T es denso.

f) Probar que si $S \perp T$ entonces $S + T$ es cerrado si y sólo si T es cerrado.

13. Sea
$$S = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}.$$
Probar que S es denso en ℓ^2.

14. Probar que un espacio de Hilbert es uniformemente convexo. Concluir que si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces sucede que $x_n \xrightarrow{w} x$.

15. Sea H un espacio de Hilbert separable y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base.

a) Probar que $e_n \xrightarrow{w} 0$.

b) Probar que $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m\rangle \to \langle x, e_m\rangle$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

16. (Banach - Saks) Sean H un espacio de Hilbert y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de H tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Probar que existe una subsucesión x_{n_k} tal que su media aritmética $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \cdots + x_{n_k})$ cumple que $z_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Sugerencia: Calcular $\left\| \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{n=1}^{k} x_n - x \right\|^2$.

17. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H. Probar que son equivalentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge debilmente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

18. Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert H y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortogonal en H que verifica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1.$$
Probar que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también completo.

Sugerencia: Definir el operador $T(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle y_n$. Luego probar que $id - T$ es compacto y por lo tanto T es de Fredholm.

Operadores en espacios de Hilbert

Si se encuentra muy atrasado con las guías, puede continuar con la práctica siguiente. Recuerde volver a esta guía cuando empiece a estudiar el espectro de un operador.

Definición: Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. El operador T se dice,

- *normal* si $TT^* = T^*T$,
- *autoadjunto* si $T^* = T$,
- *isometría* si $T^*T = id$,
- *unitario* si $T^* = T^{-1}$,
- *proyector* si es autoadjunto y $T^2 = T$,
- *isometría parcial* si T^*T es un proyector.
- *positivo* si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.

19. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que $\ker T = (\mathrm{Im}T^*)^\perp$ y $\overline{\mathrm{Im}T} = (\ker T^*)^\perp$.

20. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que:

    a) El operador T es normal si y sólo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Concluir que $\ker T = \ker T^*$ y que si T_n es una sucesión de operadores normales que convergen puntualmente a un operador T, entonces $(T_n)^*$ converge puntualmente a T^*.

    b) Si el operador T es normal entonces $\|T\|^2 = \|T^2\|$. Concluir que $\|T^n\| = \|T\|^n$.

    c) Si H es complejo, el operador T es autoadjunto si y sólo si $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$. ¿Qué sucede si H es real?.

    d) El operador T es una isometría si y sólo si $\|Tx\| = \|x\|$. Similarmente, T es una isometría si y sólo si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$.

    e) El operador T es unitario si y sólo si T es una isometría biyectiva. Concluir que T es unitario si y sólo si T y T^* son isometrías.

    f) Si T satisface $T^2 = T$, entonces T es un proyector si y sólo si T es normal. Concluir que T es proyector si y sólo si $\ker T = (\mathrm{Im}T)^\perp$.

21. Sean H un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que si $\langle Tx, x\rangle = 0$ para todo x entonces $T = 0$. ¿Qué podemos decir si H es un $\mathbb{R}$-espacio?

    Definición: Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. El *radio numérico* de T es

    $$nr(T) = \sup_{\|x\|=1} \{|\langle Tx, x\rangle|\}$$

    Observar que $nr(T) \leq \|T\|$.

22. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$. Probar que $\|T\| \leq 2nr(T)$, probar además que si T es un operador normal entonces $\|T\| = nr(T)$.

23. Sea H un espacio de Hilbert y $A : H \to H$ una función lineal tal que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todos $x, y \in H$. Probar que A es continuo y autoadjunto.