Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2018
PRÁCTICA 4
TOPOLOGÍAS DÉBILES. TEOREMA DE BANACH - ALAOGLU.

Un repaso de topología

Sea (X, τ) un espacio topológico.

- Decimos que X es $\mathbf{T_2}$ o *Hausdorff* si dados dos puntos $x \neq y$ de X existen abiertos U, V de τ disjuntos tal que $x \in U$ e $y \in V$.
- Una *base* de X es una familia $\mathcal{B}$ de abiertos tal que todo abierto de X se escribe como una unión de abiertos de la familia $\mathcal{B}$.
- Una *subbase* de X es una familia $s\mathcal{B}$ de abiertos tal que todo abierto de X se escribe como una unión de intersecciones finitas de la familia $s\mathcal{B}$.
- Una *red* en X es una función $\Lambda \to X$ con Λ un conjunto dirigido, notamos a la red por los elementos de su imagen $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Una *subred* de (x_λ) es una función $\Gamma \to \Lambda$ con Γ otro conjunto dirigido y de modo tal que dicha función preserva el orden y su imagen es cofinal. La red resultante es la composición $\Gamma \to \Lambda \to X$; notamos a la subred como $(x_{\lambda_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$.
- Una red (x_λ) de X *converge a un límite* $x_0 \in X$ si para todo abierto $U \ni x_0$ se tiene que existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ vale que $x_\lambda \in U$.

  El alumno aventurado puede probar las siguientes observaciones.
- El espacio X es Hausdorff si y sólo si toda red convergente tiene límite único.
- Sea $A \subseteq X$. Un punto x pertenece a $\overline{A}$ (la clausura de A) si y sólo si existe una red de elementos de A que converge a x.
- Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para toda red convergente $x_\lambda \to x$ vale que $f(x_\lambda) \to f(x)$.
- Un conjunto $A \subseteq X$ es compacto si y sólo toda red de elementos de A admite una subred convergente. *Sugerencia:* Dada una red (x_λ), los conjuntos de la forma $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$ satisfacen la propiedad de intersección finita. Por otro lado, dada una familia de cerrados con intersecciones finitas no vacías, podemos parametrizar sus intersecciones por las familias finitas en orden de la inclusión inversa.

La topología débil.

1. Sean E un espacio de Banach, $x_1, \ldots, x_n \in E$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^*$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos de la forma

$$V(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{x \in E : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_i)| < \varepsilon\}$$

Probar $\mathcal{B}$ es una base para topología débil w de E. Sea $\mathcal{B}'$ la familia conjuntos de la forma $V(\varphi, x_0, \varepsilon)$ para algún $x_0 \in E$, $\varphi \in E^*$ y $\varepsilon >$. Probar que $\mathcal{B}'$ es una subbase de la topología débil de E.

2. Sean E un espacio de Banach y X un espacio topológico. Probar que una *función* $f : X \to E$ es continua para la topología débil de E si y sólo si $\varphi \circ f : X \to \Bbbk$ es continua para todo funcional $\varphi \in E^*$.

3. Sea E un espacio de Banach. Probar que la topología débil en E coincide con la topología del subespacio del producto $\Bbbk^{E^*} = \prod_{\varphi \in E^*} \Bbbk$ pensando a puntos de E como funciones sobre E^*.

4. Sean E un espacio de Banach y (x_λ) una red.

   a) Probar que si x_λ converge con la topología de la norma entonces converge en la topología débil.

   b) Probar que si $x_\lambda \xrightarrow{w} x$ y la red es acotada en E y $\varphi_\gamma \xrightarrow{\|\cdot\|} \varphi$ en E^* entonces $\varphi_\gamma(x_\lambda) \to \varphi(x)$.

5. Sea E un espacio de Banach y (x_n) una sucesión tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Probar que existe una sucesión de combinaciones convexas de los elementos de $\{x_n\}$ que tienden a x en norma.

6. Sean E un espacio de Banach y (x_n) una sucesión tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Probar que la sucesión está acotada en norma y que vale

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

7. Sean E y F espacios de Banach, $T : E \to F$ lineal. Probar que T es continua si y sólo si T es $w - w$-continua.

   Concluir que $\varphi : E \to \Bbbk$ es débil-continua si y sólo si $\varphi \in E^*$.

8. Sea E un espacio uniformemente convexo. Probar que si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

9. Sean $1 < p < \infty$, X un espacio de medida y (f_n) una sucesión en $L^p(X)$. Probar que $f_n \xrightarrow{w} f$ si y sólo si las normas $\|f_n\|_p$ están uniformemente acotadas y para todo conjunto medible E vale que

$$\int_E f_n \mathrm{d}t \to \int_E f \mathrm{d}t$$

   Concluir que si $X = \mathbb{R}$ podemos tomar los conjuntos de la forma $E = [0, a]$ o $[a, 0]$ y si X es numerable alcanza con tomar los conjuntos de la forma $E = \{x\}$.

10. Sea X un espacio topológico compacto y (f_n) una sucesión en $C(X)$. Probar que $f_n \xrightarrow{w} f$ si y sólo si f_n está acotada y $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$.

    Concluir que si $f_n : X \to [0, 1]$ es una sucesión de funciones continuas que convergen puntualmente a una función continua $f : X \to [0, 1]$ entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de las f_n que convergen uniformemente a f.

11. Probar que si E^* es separable y de dimensión infinita entonces E no tiene la propiedad de Schur (es decir, existe una sucesión que converge débil pero que no converge en norma).

La topología débil-$*$

12. Enunciar y probar los análogos de los ejercicios 1 al 5 para la topología débil-$*$.

13. Sea $E = \ell^\infty$ sean para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in E^*$ las proyecciones en cada coordenada. Observar que $\|p_n\| \leq 1$. Probar que p_n no tiene ninguna subsucesión w^*-convergente.

14. Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$. Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ pero no en la topología débil.

15. Sea E un espacio de Banach reflexivo. Probar que la topología débil y la topología débil-$*$ coinciden en E^*.

16. Sean E, F espacios de Banach y $T : F^* \to E^*$ un operador que es $w^* - w^*$ continuo. Probar que T es el adjunto de un operador continuo $S : E \to F$.

17. Sea E un espacio de Banach y $S \subseteq E^*$ es un subespacio w^*-cerrado. Probar que entonces $S = ann(S_0)$ para algún subespacio $S_0 \subseteq E$.

Teorema de Banach - Alaoglu

18. Probar que todo espacio de Banach es subespacio cerrado de algún $C(X)$ para un espacio topológico compacto X.

    Bonus Track: Sea X un espacio topológico compacto y $\mathbf{T_2}$. Probar que X es métrico si y sólo si $C(X)$ es separable.

    Bonus Track 2: The return of the Bonus: Sea X un espacio topológico localmente compacto y $\mathbf{T_2}$. Probar que la compactificación de Stone-Čech de X es homeomorfo a un subconjunto de la bola unitaria de $C_b(X)^*$. Convencerse que $C_b(X) = C(\beta X)$.

19. Sea E un espacio de Banach reflexivo. Probar que toda sucesión acotada (x_n) en E tiene una subsucesión $w-$convergente. Concluir que toda sucesión acotada (φ_n) en E^* tiene una subsucesión w^*-convergente. Más aún concluir que todo subconjunto A de E es débil compacto si y sólo si es débil secuencialmente compacto.

    Sugerencia: Considerar el subespacio cerrado generado por la sucesión.

20. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo. Probar que existe $(\varphi_n) \in E^*$, tal es que $\|\varphi_n\| = 1$ y $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.

21. Sea E un espacio de Banach tal que B_E es w-compacto. Probar que E es reflexivo.

22. (c_0 es inyectivo para espacios separables) Sea E un espacio de Banach separable, $S \subseteq E$ un subespacio cerrado y $T : S \to c_0$ con $\|T\| = 1$.

    a) Para cada n, sea $T_n : S \to \mathbb{k}$ el funcional inducido por T y la proyección canónica en la coordenada n de c_0. Sea $\widetilde{T}_n \in B_{E^*}$ extensiones de T_n por Hahn-Banach. Probar que (T_n) tiene una subsucesión convergente.

    b) Sea φ un límite de alguna subsucesión de $\widetilde{T}_n$. Probar que $\varphi \in ann(S)$.

    c) Concluir que si $K = ann(S) \cap B_{E^*}$ y d es una métrica de B_{E^*} para la topología débil-* entonces $d(\widetilde{T}_n, K) \to 0$.

d) Concluir que existen $\psi_n \in K$ tales que se aproximan a $\widetilde{T}_n$ en la distancia d.

e) Construir un operador $\widetilde{T} : E \to c_0$ que extiende a T y que $\|\widetilde{T}\| \leq 2$.