Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2018
Práctica 3
Principio de Acotación Uniforme
Teorema de la Función Abierta - Teorema del Gráfico Cerrado

1. Sean E un espacio de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E)$ inversibles y $A \in \mathcal{L}(E)$ no inversible tales que $A_n \to A$. Probar que $\|A_n^{-1}\| \to \infty$.

   Bonus track: Sea E un espacio de Banach y sea $S, T \in \mathcal{L}(E)$ con T inversible. Probar que si $\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|$, entonces S es inversible y

   $$\|S^{-1} - T^{-1}\| < \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|S - T\|\|T^{-1}\|}.$$

   Concluir que los operadores inversibles $\mathcal{L}(E)^{\times}$ son un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(E)$. *Sugerencia:* Probar primero el caso de $T = \mathrm{id}$ y determinar $S + \mathrm{id}$ como una serie.

2. Sea E un espacio de Banach y $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funcionales continuos sobre E tal que para todo $x \in E$ existe $\varphi(x)$ tal que tiene que $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$. Probar que φ es un funcional acotado y que

   $$\|\varphi\| \le \liminf \|\varphi_n\|.$$

3. Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado, para cada $n \in \mathbb{N}$ $B_n : E \to F$ operadores acotados con la siguiente propiedad: para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ que tiende a 0, se tiene que $(B_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a 0. Probar que los operadores B_n están uniformente acotados. ¿Qué sucede si pedimos la misma propiedad pero para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada solamente? ¿Sigue siendo necesaria la hipótesis de E Banach?

4. Sean E un espacio de Banach y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : E \to \mathbb{k}$ funcionales continuos. Probar que son equivalentes:

   a) Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a 0 , la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n(x_n)$ es convergente.

   b) La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$ es absolutamente convergente.

5. Sean E un espacio de Banach, F un espacio normado y $T : E \to F$ un operador tal que para toda sucesión convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y todo funcional continuo $\varphi \in F^*$ se tiene que $(\varphi(T(x_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Probar que T es continuo.

6. Probar que no existe una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{k}$ tal que se satisfaga la propiedad

   "La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n c_n$ converge absolutamente $\Leftrightarrow$ la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada"

7. Sean E un espacio de Banach y $P : E \to E$ lineal, tal que $P^2 = P$. Probar que $P \in \mathcal{L}(E)$ si y sólo si $\ker P$ y $\mathrm{Im} P$ son cerrados. (cf. Ejercicio 17, Práctica 1)

8. Sea E el espacio de Banach real $L^1((1, +\infty))$, sea $T : E \to E$ dado por $Tf(t) = \frac{1}{t} f(t)$. Probar que T es acotado pero no abierto.

   Sugerencia: Ver que la función nula no está en el interior de $T(B_1(0))$

9. (Primer teorema de isomorfismo) Sean E, F espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ sobreyectivo. Definimos $\widehat{T} : E/\ker(T) \to F$ como $\widehat{T}([x]) = T(x)$. Probar que $\widehat{T}$ es un isomorfismo con la misma norma que T. ¿Qué sucede si T no es sobreyectiva?

   Definición: Sea E un espacio normado. Un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice *acotado inferiormente* si existe una constante $c > 0$ tal que para todo $x \in E$, se tiene que
   $$\|Tx\| \geq c\|x\|.$$

10. Sean E un espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$.

    a) Probar que si T es acotado inferiormente entonces ImT es cerrado. ¿Qué sucede si E no es Banach?

    b) Probar que T acotado inferiormente si y sólo si T es un isomorfismo con su imagen.

11. Sean E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con ImT cerrado. Probar que Im$T^* = ann(\ker(T))$ y por lo tanto ImT^* es cerrado. Concluir que ImT es cerrado si y sólo si ImT^* es cerrado.

    Sugerencia: Para la vuelta reducir al caso en que T es inyectivo y con imagen densa.

12. Sean E, F espacios de Banach y $S : E \to F$, $T : F^* \to E^*$ *funciones* tales que
    $$\varphi(S(x)) = T(\varphi)(x)$$
    para todo $\varphi \in F^*$ y $x \in E$. Probar que S y T son lineales, continuas y que $S^* = T$.

13. Sea E un espacio normado con dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ de modo que con ambas normas E es un espacio de Banach. Probar que ambas normas son equivalentes si y sólo si toda sucesión que es de Cauchy con una de las normas también es una sucesión de Cauchy con la otra.

    Sugerencia: Si (a_n) es una sucesión de números reales que tiende a 0 entonces existe una sucesión (ε_n) de reales positivos tales que $\varepsilon_n \to +\infty$ pero $\varepsilon_n a_n \to 0$.

14. Sean E, F espacios de Banach y $T : E \to F$ una función lineal. Definimos
    $$N_T = \bigcap \{\overline{T(V)} : \ V \text{ es un entorno del } 0\}.$$
    Probar que N_T es un subespacio cerrado de F y que T es continuo si y sólo si $N_T = 0$. En particular, la función $\overline{T} : E \to F/N_T$ que resulta de componer a T con la proyección al cociente $F \to F/N_T$ es continua.

    Sugerencia: Recordar que el Teorema de Gráfico Cerrado puede interpretarse de la siguiente manera:

    Suponiendo que $x_n \to 0$ y $T(x_n) \to y$, f es continua si y sólo si $y = 0$.

15. Sean E y F un espacios de Banach y $D \subseteq E$ un *subespacio denso*. Sea $T : D \to F$ una función lineal. Probar que el gráfico de T es cerrado en $E \times F$ si y sólo si D es un espacio de Banach con la norma $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.

    Observación: T no es necesariamente continuo con la norma de E.

16. Sea $D : C^1[0,1] \to C[0,1]$ la función derivar, $D(f) = f'$, en donde consideramos a $C^1[0,1]$ con la norma $\| \cdot \|_\infty$. Probar que tiene gráfico cerrado pero no es continua.

17. (Producto tensorial proyectivo) Sean E, F espacios de Banach. Definimos $\mathcal{B}il(E \times F)$ como el espacio de funciones bilineales $B : E \times F \to \Bbbk$ que son continuas con la norma producto. Probar que $\mathcal{B}il(E \times F)$ con la norma dada por

$$\|B\| = \sup_{\|x\|=1, \|y\|=1} |B(x,y)|$$

es de Banach.

   a) Probar que hay un operador acotado $\widehat{(\cdot,\cdot)} : E \times F \to \mathcal{B}il(E \times F)^*$ dado por

$$\widehat{(x,y)}(B) = B(x,y)$$

   Calcular la norma de $\widehat{(x,y)}$.
   Definición: El *producto tensorial proyectivo* de E con F es

$$E \otimes_\pi F = \overline{\operatorname{span}\{\widehat{(x,y)} : x \in E\,, y \in F\}} \subseteq \mathcal{B}il(E \times F)^*.$$

   Con la norma heredada de $\mathcal{B}il(E \times F)^*$. A los elemenos dados por $\widehat{(x,y)}$ los notamos $x \otimes y$. *Observar que no todos los elementos de $E \otimes_\pi F$ son esta forma.*

   b) Probar que

$$\begin{aligned} (E \otimes_\pi F)^* &\longleftrightarrow \mathcal{B}il(E \times F) \\ \varphi &\longmapsto ((x,y) \mapsto \varphi(x \otimes y)) \\ (x \mapsto \mathrm{ev}_B(x) = x(B)) &\longleftarrow\!\!\shortmid B \end{aligned}$$

   son operadores continuos uno inverso del otro.