Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2018

Práctica 2

Funcionales lineales - Teorema de Hahn-Banach

1. Sea $C_c(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas de soporte compacto con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Probar que la funcional $\int \mathrm{d}t : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{k}$ dada por integrar, no es acotada. Similarmente, si tomamos la norma $\|\cdot\|_p$, probar que evaluar en un punto x, $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$, no es un funcional acotado.

2. Sean $y = (y_n) \in \ell^\infty$, $1 \leq p < \infty$ y $1 < q \leq \infty$ tal que $1/p + 1/q = 1$. Definimos $y^* : \ell^p \to \mathbb{k}$ como
$$y^*((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, y_n$$
   a) Probar que $y^* \in (\ell^p)^*$ si y sólo si $y \in \ell^q$. Más aún $\|y^*\|_{(\ell^p)'} = \|y\|_{\ell^q}$.
   b) Probar que $y^* \in (c_0)^*$ si y sólo si $y \in \ell^1$. Más aún $\|y^*\|_{(c_0)'} = \|y\|_{\ell^1}$.
   c) Dada $\varphi \in (c_0)^*$ o $\varphi \in (\ell^p)^*$, mostrar que la sucesión dada por $y_n = \varphi(e_n)$ (en donde e_n es el n-ésimo canónico) pertenece a ℓ^1 o a ℓ^q espectivamente. Concluir que $(\cdot)^* : \ell^q \to (\ell^p)^*$ y $(\cdot)^* : \ell^1 \to (c_0)^*$ son isomorfismos isométricos. En particular $\ell^2 \cong (\ell^2)^*$.

3. Sea E un espacio de Banach con E^* separable. Probar que E es separable.

4. Sean $S, T : \ell^p \to \ell^p$ los operadores de shift y coshift de la Práctica 1. Calcular S^* y T^*.

El teorema de Hahn-Banach

5. Sean E un espacio de Banach, $x \in E$ y $S \subseteq E$ un subespacio, $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ y $y \in E$, $y \notin \ker\varphi$. Probar que:
   a) $E = \ker\varphi \oplus \mathbb{k}\cdot y$.
   b) $d(y, \ker\varphi) = \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|}$
   c) $\|x\| = \max\{\|\psi(x)\| : \psi \in E^*,\ \|\psi\| = 1\}$.
   d) Si $d(x, S) = d > 0$, entonces existe $\psi \in E^*$ tal que $\|\psi\| = 1$ y $\psi(x) = d$ y $\psi|_F = 0$.
   e)
$$\overline{S} = \bigcap_{\substack{\psi\in E^*,\\ S\subseteq\ker(\psi)}} \ker(\psi).$$

6. Sea E un espacio de Banach y $S \subset E$ un subespacio cerrado. Probar que si S tiene dimensión o codimensión finita entonces es complementado.

7. Sean E,F espacios de Banach y $T : E \to F$ un operador acotado.
   a) Probar que T^* es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Im}T$ es denso.

b) Probar que T es un isomorfismo si y sólo si T^* es un isomorfismo.

Sugerencia: Para la vuelta, probar que $T^*(B_1(0))$ contiene una bola abierta. Usar esto para probar que T tiene imagen cerrada.

c) Probar que T es un isomofismo isométrico si y sólo si T^* es un isomorfismo isométrico.

8. (Límites de Banach) Probar que existe una funcional lineal $L : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

   a) $\|L\| = 1$.

   b) Si $x \in \ell^\infty$ y $T(x) = (x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$, entonces $L(x) = L(Tx)$.

   c) Si $x \in c$, entonces $L(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

   d) Si $x \in \ell^\infty$ y $x_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $L(x) \geq 0$.

   Sugerencia: Definir L inicialmente sobre el subespacio $S \oplus \Bbbk \cdot \mathbb{1}$, siendo $S = \{x - T(x) : x \in \ell^\infty\}$ y $\mathbb{1} = (1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

9. Sean E un espacio normado y $S \subseteq E$ un subespacio cerrado. Probar que la función inducida por la inclusión en los espacios duales $i^* : E^* \to S^*$ es sobreyectiva. ¿Cuál es su núcleo? ¿Cómo se relaciona con $(E/S)^*$?

   Bonus Track: Concluir que $(\cdot)^*$ preserva sucesiones exactas.

10. (ℓ^∞ es inyectivo) Sean E un espacio normado y F un subespacio.

    a) Probar que todo operador $T : E \to \ell^\infty$ es de la forma $T(x) = (x_n^*(x))_{n\in\mathbb{N}}$ con $(x_n^*) \subseteq E^*$. Comparar la norma de T con la de los funcionales x_n^*.

    b) Probar que todo operador $T : F \to \ell^\infty$ se puede extender a $\tilde{T} : E \to \ell^\infty$ de modo que $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

    Sugerencia: Definir funcionales sobre F, extenderlos a E y luego "juntarlos" en un operador P.

    Concluir que en todo espacio de Banach que contiene a un subespacio S isométricamente isomorfo a ℓ^∞, S es complementado.

    Observación: Los espacios que satisfacen la misma propiedad que ℓ^∞ en el ejercicio *b*) anterior se llaman *inyectivos*.

Reflexividad

11. Sean E un espacio de Banach y $S \subseteq E$ un subespacio cerrado.

    a) Probar que E es reflexivo si y sólo si S y E/S lo son.

    b) Probar que E es reflexivo si y sólo si E^* lo es.

    c) Probar que E es reflexivo si y sólo si todo subespacio propio cerrado es reflexivo.
    Sugerencia: los espacios de dimensión finita son reflexivos. Elegir un subespacio adecuado tomando esto en cuenta.

12. Probar que si X es un espacio (métrico) compacto y no numerable, entonces $C(X)$ no es reflexivo.

    Observación: Esto vale para cualquier (métrico) compacto, pero requiere de la descripción $C(X)^* = \mathcal{M}(X)$.

13. Probar que la inclusión de $E^* \to E^{***}$ tiene una retracción $E^{***} \to E^*$. En particular E^* es complementado en E^{***}.

14. Probar que todo espacio normado es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C_b(X)$ para algún espacio métrico X.

15. Probar que si E es un espacio reflexivo entonces para todo $\varphi \in E^*$ existe $x \in E$ tal que $\varphi(x) = \|\varphi\|$.