Análisis Complejo– Primer cuatrimestre de 2018

Práctica N°9. Automorfismos y Teorema de la aplicación conforme

1. (a) Sea f un automorfismo de $B(0,1)$ tal que $f(0)=0$. Probar que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(z)=e^{i\theta}z$ para todo z en $B(0,1)$.

   (b) Probar que $f : B(0,1) \to B(0,1)$ es automorfismo si y sólo si existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in B(0,1)$ tales que para todo z en $B(0,1)$,
$$f(z)=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}.$$

2. (a) Sea $\mathbb{P}$ el semiplano superior (también llamado el semiplano de Poincaré). Es decir, $\mathbb{P}=\{\mathrm{Im}(z)>0\}$. Probar que $f:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ es automorfismo si y sólo si existen a,b,c y $d\in\mathbb{R}$ con $ad-bc>0$ tales que para todo z en $\mathbb{P}$,
$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

   (b) ¿Cuáles son los automorfismos del semiplano inferior?

3. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{L}=\{\mathrm{Im}(z)>0,\mathrm{Re}(z)>0\}$.

4. Sean $a,b\in\mathbb{R}$ tales que $a-b$ sea un múltiplo racional de π. Dar explícitamente un biholomorfismo ϕ que mande el conjunto $\{z\in\mathbb{C} : a<Arg(z)<b\}$ en el disco unidad.

5. Caracterizar todos los automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. (Sugerencia: recordar el ejercicio 12 de la práctica 6.)

6. Sean Ω un abierto simplemente conexo del plano, f y g dos automorfismos de Ω y a y b dos puntos distintos de Ω. Si $f(a)=g(a)$ y $f(b)=g(b)$, probar que $f(z)=g(z)$ para todo z en Ω.

7. Caracterizar todos los automorfismos de $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$. (Sugerencia: estudiar el desarrollo de Laurent en 0 de un tal automorfismo.)