Análisis Complejo- - Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica N°3. Series

1. Estudiar la convergencia de la serie cuyo término general es el siguiente:

   a) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$,
   b) $a_n = \frac{n}{2n^2+3}$,
   c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$,
   d) $a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$,
   e) $a_n = \operatorname{sen}(\frac{1}{n^2})$.

2. Demostrar que la serie de término general $a_n = \frac{1}{n^p \log(n)^q}$, $n \geq 2$,

   a) converge si $q > 0$ y $p > 1$,
   b) converge si $q > 1$ y $p = 1$,
   c) diverge si $q > 0$ si $p < 1$,
   d) diverge si $0 < q \leq 1$ y $p = 1$.

3. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 4^n} z^n$,
   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^n} z^n$,
   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{n^2} z^n$,
   d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{n^2} z^n$,
   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z^{n^2}$,
   f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

4. **Repaso. Criterio de Weierstrass.** Sea $X \subset \mathbb{C}$ un conjunto y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $|u_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in X$. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge } \implies \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge uniformemente en } X.$$

5. **Criterios de convergencia de serie**

   En lo que sigue, $(a_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ seran sucesiones de números complejos.

   a) Supongamos que $(a_n z_n)_{n\geq 0}$ converge. Demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) z_n \text{ converge } \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z_n - z_{n-1}) \text{ converge.}$$

   b) **Criterio de Dedekind.** Demostrar que si $\lim a_n = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y las sumas parciales de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas (es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\sum\limits_{n=1}^{k} z_n\right| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$) entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

   c) **Criterio de Bois-Reymond.** Demostrar que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge absolutamente y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converge.

d) **Criterio de Dirichlet.** Sea $(r_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\lim r_n = 0$ y $(z_n)_{n\geq 1}$ una sucesion de números complejos. Demostrar que si las sumas parciales de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ están acotadas, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n z_n$ converge. (Sugerencia: usar el criterio de Dedekind.)

6. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar el comportamiento en el borde del disco de convergencia:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} z^n$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} z^n$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n} z^n$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^n} z^n$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2-i)n^2} z^n$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(1+i)^n} z^n$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! z^{n^2}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n\ z^n$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n(n+1)}$.

7. Hallar los valores de z para los cuales las siguientes series resultan convergentes:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|z|}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+|z|}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^{2n}}{7^n}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n z^n}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz}}{n+1}$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z}\right)^n$, $|\alpha| < 1$.

8. Para $m \in \mathbb{N}$ fijo, probar que los conjuntos de convergencia de las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n} z^n$ son iguales.

9. Probar que si el radio de convergencia de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es $\rho > 0$, entonces el de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n$ es también ρ para todo $k \in \mathbb{N}$.

10. Hallar los términos de orden ≤ 3 en el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

a) $e^z \operatorname{sen} z$,

b) $\operatorname{sen} z \cos z$,

c) $\frac{e^z - 1}{z}$,

d) $\frac{e^z - \cos z}{z}$,

e) $\frac{1}{\cos z}$,

f) $\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$.

11. Para $n \in \mathbb{N}$, hallar el desarrollo en serie de potencias de la funcion $f_n(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$. (Sugerencia: $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} f_1^{(n-1)}$.)

12. Sea $f(z) = \sum\limits_n a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $\rho > 0$. Se dice que $f(z)$ es *par* (*impar*) si $a_n = 0$ para todo n impar (par). Mostrar que

- f es par sii $f(-z) = f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$,

- f es impar sii $f(-z) = -f(z)$ para todo z con $|z| < \rho$.

13. La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

    a) Probar que $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en un entorno del origen, y la función $R(z)$ es una función racional. Hallar una fórmula explícita para $R(z)$.

    b) Descomponiendo $R(z)$ en fracciones simples y usando la suma de la serie geométrica, obtener un nuevo desarrollo de $R(z)$ en serie de potencias.

    c) Comparar ambos desarrollos y obtener una fórmula cerrada para el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

14. **Desarrollo analítico de funciones enteras.** Consideremos la función $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

    a) Mostrar que h es entera y calcular su derivada.

    b) Mostrar que $h(z + w) = h(z)h(w)$.

    c) Probar que $h(z) = e^z$.

    d) Deducir el desarrollo en serie de potencias de $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$.

15. **Desarrollo analítico del logaritmo.** Sea *Log* la rama principal del logaritmo, y sean $f(z) = Log(z + 1)$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$.

    a) Calcular el radio de convergencia de g.

    b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$ para z dentro del radio de convergencia de g.

    c) Deducir que $f(z) = g(z)$ para dichos z.

16. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ dos series de potencia con radios de convergencia ρ_a, ρ_b respectivamente. Se define el producto de Cauchy de series de potencia como:

    $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \text{ donde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

    Probar que si el producto de Cauchy converge absoluta y uniformemente en $|z| \leq r$ para todo $r < \min\{\rho_a, \rho_b\}$. Deducir que si ρ es el radio de convergencia del producto de Cauchy, entonce $\rho \geq \min\{\rho_a, \rho_b\}$.

17. **Función Zeta de Riemann.**

    Para cada $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}(s) > 1$ definimos la función Zeta de Riemann de la siguiente manera:

    $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

    donde $n^s = \exp(s \cdot \log n)$ se calcula usando la rama principal del logaritmo.

i) Pruebe que converge en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$, y que converge uniformemente en cada semiplano $\mathrm{Re}(s) \geq 1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

i) Deducir que $\zeta(s)$ es continua en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$. (Más adelante resultará que es holomorfa allí)

18. Las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad s, a_n \in \mathbb{C} \ (*)$$

se denominan series de Dirichlet. La función zeta de Riemann del ejercicio anterior es el ejemplo más sencillo (allí $a_n = 1$).

i) Probar que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^s} \right|$$

no converge para todo s ni diverge para todo s, entonces existe un número real σ_a tal que la serie (*) converge absolutamente si $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ pero no converge absolutamente si $\mathrm{Re}(s) < \sigma_a$. El semiplano $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ se denomina *semiplano de convergencia absoluta* de la serie de Dirichlet (*).

ii) Probar que la serie converge uniformenente en cada semiplano $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma_a + \varepsilon$.

iii) Deducir que define una función continua en $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$.

19. Consideramos siguiente serie de Dirichlet

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

a) ¿ Cuál es su semiplano de convergencia absoluta ?

b) Probar que si $\mathrm{Re}(s) > 0$ la serie $L(s)$ converge. Sugerencia: recuerde los criterios vistos anteriormente.

c) Probar que si $\mathrm{Re}(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} L(s)$$

Comentario: Esta fórmula puede usarse para extender la definición de $\zeta(s)$ a la región $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 0, s \neq 1\}$