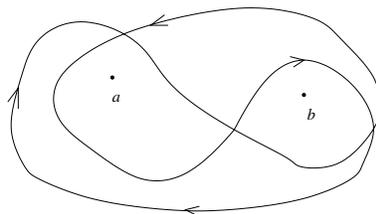


ANÁLISIS COMPLEJO— PRIMER CUATRIMESTRE DE 2018

Addendum a la práctica 4. Más sobre Integrales- Dominios simplemente conexos.

1. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$, y sea γ la curva en la siguiente figura:



- i) Mostrar que $\eta(\gamma, a) = \eta(\gamma, b) = 0$.
- ii) Convencerse de que γ no es homotópica a cero en Ω .
2. Probar que si Ω es simplemente conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f tiene una primitiva en Ω . ¿Es necesaria la hipótesis de simplemente conexo?
3. (a) Sea Ω un abierto simplemente conexo y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Sean $z_0 \in \Omega$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tales que $e^{w_0} = f(z_0)$. Demostrar que existe una función holomorfa $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$ para todo $z \in \Omega$ y $g(z_0) = w_0$. (Sugerencia: tomar g tal que $g' = \frac{f'}{f}$ y mostrar que $h = e^{-g}f$ es constante.)
- (b) Demostrar que tal g es única.
- (c) Decidir si en las condiciones del ítem (a), vale que para todos $z_1, z_2 \in \Omega$, $f(z_1) = f(z_2) \implies g(z_1) = g(z_2)$.
- (d) ¿Es necesaria la hipótesis de “simplemente conexo” en el ítem (a)?
4. Sean f y g dos funciones enteras. Probar que $f^2(z) + g^2(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \sen(h(z))$. (Sugerencia: notar que $1 = (f + ig)(f - ig)$, luego $(f + ig)(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.)