Análisis I - Análisis Matemático I - Matemática 1 - Análisis II (C)

Primer cuatrimestre – 2018

Primer parcial - 12/05/18 - Tema B

Algunas soluciones posibles[1]

El presente documento tiene por finalidad explicar lo más detalladamente posible algunas soluciones de los ejercicios, no siendo estas las únicas formas de resolver los mismos.
Las soluciones para el tema A son análogas cambiando las funciones.

---

1. Hallar, si existen, el supremo y el ínfimo del conjunto

$$A = \left\{ (-1)^m + \frac{5}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Solución

Nos piden hallar el supremo y el ínfimo de A si existen. Sabemos que $A \subseteq \mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}$ todo conjunto acotado tiene supremo e ínfimo. Entonces una forma de justificar que supremo e ínfimo existen es viendo que A es acotado. Observamos que:

- $(-1)^m = 1$ si m es par.
- $(-1)^m = -1$ si m es impar.

Luego

$$-1 \leq (-1)^m \leq 1. \tag{1}$$

Por otro lado:

- Como n es un natural, en particular es un número positivo, luego la división de dos números positivos $\frac{5}{n}$ es un número positivo, es decir:

$$0 \leq \frac{5}{n}.$$

- Como n es un natural es mayor o igual que 1 y en ese caso:

$$\begin{array}{lcr}
 & 1 \leq n & \\
\iff & \dfrac{1}{n} \leq 1 & \text{Invertimos las fracciones} \\
\iff & 5 * \dfrac{1}{n} \leq 5 * 1 & \text{Multiplicando por 5 en ambos términos} \\
\iff & 0 \leq \dfrac{5}{n} \leq 5 & \text{Agregando la observación anterior}
\end{array} \tag{2}$$

Juntando las cotas obtenidas en (1) y (2) se tiene que:

$$\underbrace{-1+0}_{-1} \leq (-1)^m + \frac{5}{n} \leq \underbrace{1+5}_{6} \tag{3}$$

Tras examinar algunos valores podemos intuir que estos pueden ser el supremo y el ínfimo. Hay varias formas de probarlo:

Forma 1: Con propiedades.

[1] Soluciones propuestas por Luis Escudero. Errores, dudas, sugerencias: laescudero@gmail.com

Observamos que

$$\begin{aligned} A &= \left\{(-1)^m + \frac{5}{n} : m,n \in \mathbb{N}, m \text{ par}\right\} \cup \left\{(-1)^m + \frac{5}{n} : m,n \in \mathbb{N}, m \text{ impar}\right\} \ , \\ &= \underbrace{\left\{1 + \frac{5}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{-1 + \frac{5}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}}_{A_2} . \end{aligned} \tag{4}$$

Si tenemos una escritura de A como union de subconjuntos, tal como la que está en (4), A es acotado si y sólo si A_1 y A_2 son acotados y en ese caso vale que:

$$\begin{aligned} \sup A &= \max\{\sup A_1,\ \sup A_2\} , \\ \inf A &= \min\{\inf A_1,\ \inf A_2\} . \end{aligned} \tag{5}$$

Definimos las sucesiones de números reales $(c_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} c_n &= 1 + \frac{5}{n} \ , \\ d_n &= -1 + \frac{5}{n} \ . \end{aligned}$$

Observamos que en ese caso el conjunto $A_1 = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Luego $\sup A_1 = \sup c_n$ y $\inf A_1 = \inf c_n$.
Veamos que c_n es una sucesión decreciente, puesto que en ese caso el primer elemento c_1 es el máximo de la sucesión y por lo tanto el supremo. Además, si c_n es una sucesión decreciente y convergente, se tiene que es acotada y que $\inf c_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.
Veamos que c_n es decreciente:

$$\begin{array}{ccc} & c_n \text{ es decreciente} & , \\ \iff & c_n \geq c_{n+1} & \forall n \in \mathbb{N} \ , \\ \iff & 1 + \dfrac{5}{n} \geq 1 + \dfrac{5}{n+1} & \forall n \in \mathbb{N} \ , \\ \iff & \dfrac{5}{n} \geq \dfrac{5}{n+1} & \forall n \in \mathbb{N} \ , \\ \iff & 5(n+1) \geq 5n & \forall n \in \mathbb{N} \ , \\ \iff & 5n + 5 \geq 5n & \forall n \in \mathbb{N} \ , \\ \iff & 5 \geq 0 \ . & \end{array}$$

Como son todos "si y sólo si" (" $\iff$ "), son condiciones equivalentes, y como $5 \geq 0$ entonces c_n es decreciente. Luego por lo mencionado anteriormente:

$$\begin{aligned} \sup A_1 &= \sup c_n = c_1 = 1 + \frac{5}{1} = 6 \ , \\ \inf A_1 &= \inf c_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1 \ . \end{aligned}$$

Con los mismos razonamientos, obtenemos que d_n es decreciente y además:

$$\begin{aligned} A_2 &= \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \ , \\ \sup A_2 &= \sup d_n = d_1 = -1 + \frac{5}{1} = 4 \ , \\ \inf A_2 &= \inf d_n = \lim_{n\to\infty} d_n = -1 \ . \end{aligned}$$

Reemplazando estos datos en (5) obtenemos:

$$\sup A = \text{máx}\{\sup A_1,\ \sup A_2\} = \text{máx}\{6,\ 4\} = 6$$
$$\text{ínf}\, A = \text{mín}\{\text{ínf}\, A_1,\ \text{ínf}\, A_2\} = \text{mín}\{1,\ -1\} = -1.$$

Forma 2: Con la definición.

Recordamos que $\sup A$ es por definición la *menor* de las *cotas superiores*. Para ver que $6 = \sup A$ basta ver que

(a) 6 es cota superior: Es decir que es mayor o igual que todos los elementos del conjunto A.

(b) Es la *menor* dentro de todas las cotas superiores: Si hay otra cota superior de A tiene que ser necesariamente mayor o igual a 6.

Ya vimos que 6 es cota superior en la ecuación (3).
Ahora veamos que es la menor dentro de las cotas superiores. Para eso consideramos una cota superior arbitraria $c \in \mathbb{R}$ y veamos que tiene que ser mayor o igual a 6. La definición de cota superior de A nos dice que c satisface:

$$(\forall x \in A) \qquad x \leq c\ .$$

Esto es equivalente a que:

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}) \qquad (-1)^m + \frac{5}{n} \leq c\ . \tag{6}$$

En particular, como la desigualdad (6) vale para todo par de números naturales n, m, tomamos $n = 2, m = 1$ y obtenemos que

$$\underbrace{(-1)^2 + \frac{5}{1}}_{6} \leq c\ .$$

Luego

$$6 \leq c\ ,$$

que es lo que indica que toda cota superior tiene que ser mayor o igual a 6.
Análogamente, para ver que $-1 = \text{ínf}\, A$ por definición, tenemos que ver que:

(a) -1 es cota inferior: Es decir que es menor que todos los elementos del conjunto A.

(b) Es la *mayor* dentro de todas las cotas inferiores: Si hay otra cota inferior de A tiene que ser necesariamente menor o igual a -1.

Ya vimos que -1 es cota inferior en la ecuación (3).
Ahora veamos que es la mayor dentro de las cotas inferiores. Para eso consideramos una cota inferior arbitraria c y veamos que tiene que ser menor o igual a -1. Aplicando la definición de cota inferior de A se tiene que $d \in \mathbb{R}$ satisface:

$$(\forall x \in A) \qquad d \leq x\ .$$

Esto es equivalente a que:

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}) \qquad d \leq (-1)^m + \frac{5}{n}\ . \tag{7}$$

En particular, como la desigualdad (7) vale para todo par de números naturales n, m, tomamos $m = 1$ y obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$d \leq (-1) + \frac{5}{n} \; .$$

Recordemos que si tenemos dos sucesiones convergentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vale que si $a_n \leq b_n$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. En particular, tomando la sucesión $a_n = d$, y $b_n = (-1) + \frac{5}{n}$ se tiene que

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} d}_{d} \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} (-1) + \frac{5}{n}}_{-1}$$

Luego

$$d \leq -1 \; ,$$

que es lo que indica que toda cota inferior tiene que ser menor o igual a -1.

2. Decidir si la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{yx^3+xy^2} - 1}{|y+2|x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua.

Solución

Nos piden probar que la función es continua para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \dfrac{e^{yx^3+xy^2} - 1}{|y+2|x^2 + y^2}$, donde en el numerador tenemos composición de funciones continuas, y en el denominador tenemos una función continua que no se anula, pues como $|y+2|x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$, se tiene que $|y+2|x^2 + y^2 = 0$ implica necesariamente:

$$\begin{array}{crcl} \Rightarrow & |y+2|x^2 = 0 & , & y^2 = 0\,, \\ \Rightarrow & |y+2|x^2 = 0 & , & y = 0\,, \\ \Rightarrow & |0+2|x^2 = 0 & , & y = 0\,, \\ \Rightarrow & 2x^2 = 0 & , & y = 0\,, \\ \Rightarrow & x^2 = 0 & , & y = 0\,, \\ \Rightarrow & x = 0 & , & y = 0. \end{array}$$

Luego, este denominador sólo se anula en $(0,0)$. Entonces, el cociente es continuo fuera del $(0,0)$. Para ver continuidad en el $(0,0)$, queremos ver que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Como $f(0,0) = 0$ y en el resto del dominio se define como $f(x,y) = \dfrac{e^{yx^3+xy^2} - 1}{|y+2|x^2 + y^2}$, basta ver que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{yx^3+xy^2} - 1}{|y+2|x^2 + y^2} = 0 \tag{8}$$

Recordando que

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \; ,$$

podemos reescribir la función para calcular el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{yx^3+xy^2}-1}{|y+2|x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\left(\frac{e^{yx^3+xy^2}-1}{yx^3+xy^2}\right)}_{g(x,y)} \underbrace{\left(\frac{yx^3+xy^2}{|y+2|x^2+y^2}\right)}_{h(x,y)} . \tag{9}$$

Como $(x,y) \to (0,0)$, se tiene que $x \to 0$ e $y \to 0$, luego si $t = yx^3 + xy^2$, se tiene que $t \to 0$. Por lo tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 1$, por lo que de existir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) \ .$$

Veamos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$. Lo vamos a probar por definición. Sea $\epsilon > 0$, queremos ver que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x,y)\| < \delta \ \Rightarrow \ |h(x,y)| < \epsilon$$

$$|h(x,y)| = \left|\frac{yx^3+xy^2}{|y+2|x^2+y^2}\right| \tag{10}$$

$$= \frac{\left|yx^3+xy^2\right|}{|y+2|x^2+y^2}. \tag{11}$$

Si $\delta < 1$, se tiene que

$$|y| \le \|(x,y)\| \le \delta < 1$$

Luego

$$\begin{aligned} -1 &< y &&< 1 \\ -1+2 &< y+2 &&< 1+2 \\ 1 &< y+2 &&< 3 \ . \end{aligned}$$

En particular como $y + 2 > 1$ se tiene que $y + 2$ es positivo y por lo tanto es igual a su módulo. Luego $|y + 2| > 1$. Luego la ecuación (11) se puede acotar así:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|yx^3+xy^2\right|}{|y+2|x^2+y^2} &\le \frac{\left|yx^3+xy^2\right|}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\left|yx^3+xy^2\right|}{\|(x,y)\|^2} \\
&\le \frac{|y||x|^3+|x||y|^2}{\|(x,y)\|^2} && \text{Aplicando desigualdad triangular} \\
&\le \frac{\|(x,y)\|^4+\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} && \text{Usando que la norma acota a los módulos de x e y.} \\
&= \frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} + \frac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} && \text{Distribuyendo} \\
&= \|(x,y)\|^2 + \|(x,y)\| \\
&\le \delta^2 + \delta && \text{Usando que } \delta \text{ acota la norma de (x,y)} \\
&\le \delta + \delta && \text{Tomando } \delta < 1 \\
&\le 2\delta
\end{aligned}$$

Luego si $2\delta < \epsilon$ o bien $\delta < \frac{\epsilon}{2}$ ya estamos.

Entonces, recordando todas las hipótesis que fuimos tomando para ir acotando tenemos que pedir $\delta < \text{mín}\{1, \frac{\epsilon}{2}\}$.
De esa forma: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$ que era lo que precisábamos demostrar para poder segurar que valiera el límite de la ecuación (8).

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 + y^2 x}{2x^2} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Hallar las derivadas direccionales de f en el origen para todo vector $v \in \mathbb{R}^2$, con $\|v\| = 1$.
(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución

Parte (a): Sea $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $v = (a,b)$. En ese caso se tiene que $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ o equivalentemente elevando al cuadrado, $a^2 + b^2 = 1^2 = 1$. Nos piden calcular $\dfrac{\partial f}{\partial v}$, para eso planteamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + tv) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + (ta,tb)) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + ta, 0 + tb) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} \end{aligned} \tag{12}$$

Acá hay que tener cuidado porque la función está partida en $x = 0$. Con lo cual de acuerdo a si $a = 0$ o no, vamos a tener que usar una expresión u otra.

<u>Caso $a = 0$:</u> Como $a^2 + b^2 = 1$, se tiene que $b^2 = 1$, lo cual implica que $b = 1$ ó $b = -1$. Luego $v = (0,1)$ ó $v = (0,-1)$. Recordemos que en ese caso, según la definición del enunciado, a los puntos de la forma $(0,y)$ les pasa que $f(0,y) = 0$. En particular, si $a = 0$, $f(ta,tb) = f(0,tb) = 0$ y $f(0,0) = 0$. Entonces el límite de la ecuación (12) nos queda:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb) - f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,tb) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{0 - 0}{t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego si $v = (0,1)$ o $v = (0,-1)$, la derivada direccional existe y vale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0$.

__**Caso $a \neq 0$:**__ Si $a \neq 0$, entonces $ta \neq 0$, en particular el límite de la ecuación (12) nos queda:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(tb)^4+(tb)^2(ta)}{2(ta)^2}-0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(tb)^4+(tb)^2(ta)}{2t(ta)^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^4b^4+t^3b^2a}{2t^3a^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3(tb^4+b^2a)}{t^3 2a^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3}(tb^4+b^2a)}{\cancel{t^3}2a^2} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{tb^4+b^2a}{2a^2} \\
&= \frac{b^2}{2a} \qquad (13)
\end{aligned}$$

Luego, si $v=(a,b)$ con $\|v\|=1$ y $a \neq 0$ entonces, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\dfrac{b^2}{2a}$.

Parte (b) Forma 1: Si tomamos la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t)=(t^2,t)$, que tiende a $(0,0)$, cuando t tiende a 0, se ve que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) &= \lim_{t\to 0} \frac{t^4+t^2t^2}{2(t^2)^2} \ , \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{2t^4}}{\cancel{2t^4}} \\
&= 1 \neq 0 = f(0,0)
\end{aligned}$$

Luego, vemos que sobre una curva que tiende a $(0,0)$, el límite de $f(x,y)$ no coincide con el valor de $f(0,0)$ por lo tanto la función no es continua, y en particular no es diferenciable.

Parte (b) Forma 2: f es diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si existen las derivadas parciales en ese punto y ocurre que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\|(x,y)\|}=0 \qquad (14)$$

Según la definición de la función: $f(0,0)=0$, y según el item (a), la derivada direccional existe en todas las direcciones, en particular para $v=(1,0)$ usamos la fórmula (13) que nos dice que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=\dfrac{0^2}{2*1}=0$. Y si $v=(0,1)$ se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0$. Reemplazando nos queda que f es diferenciable si y sólo si:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0-0(x-0)-0(y-0)}{\|(x,y)\|}=0 \ ,$$

o equivalentemente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|}=0 \ ,$$

Si tomamos la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^2, t)$, que tiende a $(0,0)$, cuando t tiende a 0, se ve que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha(t))}{\|\alpha(t)\|} &= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^4 + t^2t^2}{2(t^2)^2}}{\left\|\sqrt{t^2+(t^2)^2}\right\|} , \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{2t^4}}{\cancel{2t^4}\sqrt{t^2+t^4}} , \\
&= \infty .
\end{aligned}$$

Luego, vemos que sobre una curva el límite no da cero, por lo que entonces, la función no es diferenciable.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \frac{9}{5}, \quad \text{para } v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),$$

y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la función definida como $g(t) = \big((1+t)e^t, \operatorname{sen}(t)\big)$.
Sabiendo que $(f \circ g)(t) = e^t$, hallar la ecuación del plano tangente a f en $(1,0)$.

Solución

Nos piden hallar el plano tangente de f en $(1,0)$. La expresión para el plano es:

$$\Pi_{(1,0)} : z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-0)$$

Eso implica que para decir cuál es el plano tangente necesitamos conocer:

- $f(1,0)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$

Para eso, utilizamos los datos que nos dan. Observamos que $g(t) = \big((1+t)e^t, \operatorname{sen}(t)\big)$. En particular nos damos cuenta de que $g(0) = \big((1+0)e^0, \operatorname{sen}(0)\big) = (1,0)$. Además sabemos que $(f \circ g)(t) = e^t$, luego $f(g(0)) = e^0 = 1$ pero $g(0) = (1,0)$, eso implica que $f(1,0) = 1$.

Por otro lado, como f es diferenciable y $\|v\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \left\langle \nabla f_{(1,0)}, v \right\rangle ,$$

luego, usando la información del enunciado:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{5} = \frac{\partial f}{\partial v}(1,0) &= \langle \nabla f_{(1,0)}, v \rangle , \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \right\rangle , \\
&= \frac{3}{5}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) ,
\end{aligned}$$

y dividiendo por 5 en ambos términos

$$9 = 3\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 4\frac{\partial f}{\partial y}(1,0).$$

Por otro lado como las funciones f y g son diferenciables, su composición también lo es y aplicando la regla de la cadena tenemos que :

$$D(f \circ g)(t) = Df_{g(t)}Dg_t$$

que traducido a nuestro ejercicio es:

$$(f \circ g)^{'}(t) = (\nabla f)_{g(t)}Dg_t \ . \tag{15}$$

Calculamos las derivadas, y matrices diferenciales:

1. $(f \circ g)(t) = e^t$, entonces $(f \circ g)^{'}(t) = e^t$
2. $\nabla f_{g(t)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(g(t)\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(g(t)\right)\right)$
3. $Dg(t) = \begin{bmatrix} \left((1+t)e^t\right)^{'} \\ (\text{sen}(t))^{'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+t)e^t \\ \cos(t) \end{bmatrix}$

Reemplazando en (15) nos queda

$$e^t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(t))\right)\begin{bmatrix} (2+t)e^t \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

y evaluando en 0 :

$$\begin{aligned} 1 = e^0 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(0)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(0))\right)\begin{bmatrix} (2+0)e^0 \\ \cos(0) \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 1\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \end{aligned}$$

Luego, nos queda por resolver el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} 3\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 4\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 9 \\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 \end{cases}$$

De lo cual obtenemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 3$ y finalmente nos queda que el plano buscado es:

$$\Pi_{(1,0)} : z = 1 - (x-1) + 3y$$