ALGEBRA LINEAL - Práctica N°2 - Primer cuatrimestre de 2018
Matrices y coordenadas

Ejercicio 1.

i) Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n\times n}$ y calcular su dimensión.

a) $S_1 = \{A \in K^{n\times n} / \, A = A^t\}$ (matrices simétricas)

b) $S_2 = \{A \in K^{n\times n} / \, A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)

c) $S_3 = \{A \in K^{n\times n} / \, A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)

d) $S_4 = \{A \in K^{n\times n} / \, A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)

e) $S_5 = \{A \in K^{n\times n} / \, A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = \ldots = A_{nn}\}$ (matrices escalares)

Probar que $S_1 \oplus S_2 = K^{n\times n}$ si $2 \neq 0$ en K.

Ejercicio 2.

i) Probar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo.

ii) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n\times n} / \, A.B = B.A \;\; \forall\, B \in K^{n\times n}\}$.

iii) Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $K^{n\times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \;\; \forall\, j \in \mathbb{N}$.

iv) Sea $A \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.

v) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $A^2 - B^2 = (A-B).(A+B)$

Ejercicio 3. Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:

i) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $B = 0$

ii) $A.B = A.C$ y $A \neq 0 \;\Rightarrow\; B = C$

iii) $A.B = 0 \;\Rightarrow\; B.A = 0$

iv) $A^j = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$

v) $A^2 = A \;\Rightarrow\; A = 0$ ó $A = I_n$

Ejercicio 4. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto $T = \{B \in K^{n\times n} / \, A.B = 0\}$ es un subespacio de $K^{n\times n}$. Si $S \subset K^n$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A, probar que $\dim T = n.\dim S$.

Ejercicio 5. Sean $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$, $D, D' \in K^{n\times n}$. Probar:

i) $(A.B)^t = B^t.A^t$

ii) $tr(D.D') = tr(D'.D)$

Ejercicio 6. Sean A y $B \in K^{n\times n}$.

i) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A.B$ es triangular superior.

ii) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

Ejercicio 7. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A.A^t \neq A^t.A$.

ii) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?

iii) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A.A^t = 0 \iff tr(A.A^t) = 0$.

Ejercicio 8. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

i) $A\,,\,B \in GL(n,K) \;\Rightarrow\; A + B \in GL(n,K)$

ii) $A \in GL(n,K) \iff A^t \in GL(n,K)$

iii) $tr(A) = 0 \;\Rightarrow\; A \notin GL(n,K)$

iv) A nilpotente (es decir, $\exists\, j \in \mathbb{N} \,/\, A^j = 0$) $\;\Rightarrow\; A \notin GL(n,K)$

Ejercicio 9. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n \,/\, A.x = b\}$. Probar:

i) Si $C \in GL(m,K)$, entonces $H = \{x \in K^n \,/\, (C.A).x = C.b\}$.

ii) Si $m = n$ y $A \in GL(n,K)$, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es? (Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Ejercicio 10. Determinar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas. Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ejercicio 11. Calcular el rango de las siguientes matrices:

i) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 12. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$

ii) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3\,,\, 1 + X\,,\, X^2 + 5\,,\, X^3 + X^2\}$

iii) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 14. Calcular $C(B, B')$ en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$

ii) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3\,,\, 1 + X\,,\, X^2\}$, $B' = \{1\,,\, X + 3\,,\, X^2 + X\}$

iii) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$

Ejercicio 15. Dado $v \in V$ y las bases B y B', hallar las coordenadas de v respecto de B y, utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B'.

i) $v = (-1, 5, 6)$ y B, B' como en el Ejercicio 14. i)

ii) $v = 3 + X^2$ y B, B' como en el Ejercicio 14. ii)

Ejercicio 16. Dadas la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3, hallar:

i) una base B_1 de K^3 tal que $M = C(B_1, B)$.

ii) una base B_2 de K^3 tal que $M = C(B, B_2)$.