Solución del Primer Parcial de Álgebra Lineal

Juan Pablo De Rasis

26 de mayo de 2018

Ejercicio 1. Sean

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

Definir, si es posible, una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nilpotente tal que

$$\mathrm{Nu}\,(f) = S \cap T$$

$$\mathrm{Nu}\left(f^3\right) = S$$

(Basta dar la transformación lineal definiéndola en una base de $\mathbb{R}^4$).

Solución. Buscaremos una base de $S \cap T$ y la extenderemos a una base de S. Observemos que $x \in S \cap T$ si y solo si satisface las ecuaciones correspondientes a ambos espacios. Por lo tanto buscamos resolver el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Planteamos el problema de forma matricial, y a las filas segunda y tercera les restamos la primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, de la última fila obtenemos $x_3 = -x_4$ y de la segunda obtenemos $x_2 = x_3$. Sustituyendo en la primera obtenemos $x_1 - x_2 + 2x_2 - x_2 = 0$, de donde $x_1 = 0$. Así,

$$x = (0, x_2, x_2, -x_2) = x_2\,(0, 1, 1, -1)$$

y por lo tanto $S \cap T = \langle (0, 1, 1, -1) \rangle$.

Ahora, $x \in S$ si y solo si $x_2 = x_1 + 2x_3 + x_4$, de donde

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1 + 2x_3 + x_4, x_3, x_4) =$$

$$x_1\,(1, 1, 0, 0) + x_3\,(0, 2, 1, 0) + x_4\,(0, 1, 0, 1)$$

Por lo tanto $S = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle$.

Extendiendo la base obtenida de $S \cap T$ a una base de S utilizando los generadores de S ya encontrados, se ve fácilmente que $\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, -1)\}$ es una base de S. Completamos a una base B de $\mathbb{R}^4$:

$$B := \{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, -1)\}$$

Definimos f sobre B de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} (0,0,0,1) & \mapsto & (1,1,0,0) \\ (1,1,0,0) & \mapsto & (0,1,0,1) \\ (0,1,0,1) & \mapsto & (0,1,1,-1) \\ (0,1,1,-1) & \mapsto & (0,0,0,0) \end{array}$$

De esta definición y nuestra descripción del subespacio S vemos que $\mathrm{Im}\,(f) = S$. En particular, la imagen de f tiene dimensión 3, de donde (por el teorema de la dimensión) el núcleo debe tener dimensión 1, y al estar $(0,1,1,-1)$ (generador de $S \cap T$) en dicho núcleo, se sigue que $\mathrm{Nu}\,(f) = S \cap T$.

Siguiendo la definición de f, podemos ver que f^3 queda definida sobre B de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} (0,0,0,1) & \mapsto & (0,1,1,-1) \\ (1,1,0,0) & \mapsto & (0,0,0,0) \\ (0,1,0,1) & \mapsto & (0,0,0,0) \\ (0,1,1,-1) & \mapsto & (0,0,0,0) \end{array}$$

Aquí vemos que $\mathrm{Im}\left(f^3\right)$ tiene dimensión 1, luego $\mathrm{Nu}\left(f^3\right)$ tiene dimensión 3. Como evidentemente $S \subseteq \mathrm{Nu}\left(f^3\right)$ entonces debe haber igualdad, dado que ambos subespacios tienen la misma dimensión. Finalmente, es claro que f^4 es la función nula, pues $f\,(0,1,1,-1) = (0,0,0,0)$. Así, f satisface las condiciones del enunciado.

Ejercicio 2. Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definimos $T_A : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ como $T_A\,(B) = AB - BA$.

a) Probar que T_A es una transformación lineal y no es un epimorfismo.

b) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ hallar bases B y B' de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ tales que

$$|T_A|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

a) Queremos ver que dadas dos matrices X, Y en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se cumple la igualdad $T_A\,(X + \lambda Y) = T_A\,(X) + \lambda T_A\,(Y)$. En efecto,

$$T_A\,(X + \lambda Y) = A\,(X + \lambda Y) - (X + \lambda Y)\,A =$$

$$= AX + \lambda AY - XA - \lambda YA = (AX - XA) + \lambda\,(AY - YA) = T_A\,(X) + \lambda T_A\,(Y)$$

Para ver que no es un epimorfismo, recordemos que la función *traza* es una transformación lineal que, por el inciso (ii) del Ejercicio 5 de la Práctica 2 satisface $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$ para todo par de matrices A y B en $\mathbb{K}^{n\times n}$. Por lo tanto, todos los elementos de la imagen de T_A tienen traza nula, de donde la imagen no puede ser todo el espacio $\mathbb{K}^{n\times n}$, dado que siempre existen matrices de traza no nula (tomemos por ejemplo la matriz canónica E_{11}).

Otra forma de ver que no es un epimorfismo es observar que, como la transformación lineal está definida entre espacios vectoriales de igual dimensión finita, ser epimorfismo es equivalente a ser monomorfismo. Como esto es, a su vez, equivalente a tener núcleo trivial, basta con encontrar una matriz no nula en $\mathbb{K}^{n\times n}$ que pertenezca al núcleo de T_A. La matriz identidad satisface esas condiciones.

b) Considerando la base canónica $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ de $\mathbb{C}^{2\times 2}$, se tiene que

$$\{T_A(E_{11}), T_A(E_{12}), T_A(E_{21}), T_A(E_{22})\}$$

es un sistema de generadores de $\operatorname{Im}(T_A)$. Como

$$T_A(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_A(E_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_A(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -T_A(E_{11}), \quad T_A(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -T_A(E_{11})$$

entonces $\{T_A(E_{11}), T_A(E_{12})\}$ es base de $\operatorname{Im}(T_A)$. Se sigue, por el teorema de la dimensión, que $\dim(\operatorname{Nu}(f)) = 2$.

Más aún, como $T_A(E_{21}) = -T_A(E_{11})$ y $T_A(E_{22}) = -T_A(E_{11})$ entonces $E_{21} + E_{11}$ y $E_{22} + E_{11}$ pertenecen al núcleo de T_A, y al ser linealmente independientes, forman una base de dicho subespacio.

Tomamos $B := \{E_{11}, E_{12}, E_{21} + E_{11}, E_{22} + E_{11}\}$, que resulta una base de $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Para obtener B', extendemos la base obtenida de $\operatorname{Im}(T_A)$ a una base de $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Por ejemplo, podemos tomar $B' := \{T_A(E_{11}), T_A(E_{12}), E_{21}, E_{22}\}$. Es claro que entonces $|T_A|_{BB'}$ tiene la forma buscada.

Ejercicio 3. Sean $B = \left\{1, x-1, x^2+x, x^3-1\right\}$ y $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}_3[x]^*$ definidos como

$$f_1(p) = p(-1), \quad f_2(p) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx, \quad (f_3)_{B^*} = (3, 0, 2, 0)$$

Hallar una base de un subespacio $S \subset \mathbb{R}_3[x]$ tal que $S^\circ = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$.

Solución. Recordemos el resultado teórico que dice lo siguiente: dados un cuerpo $\mathbb{K}$, un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión finita y un subespacio T de V^*, el conjunto $S := \{x \in V : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } \varphi \in T\}$ resulta ser un subespacio de V que además satisface $S^\circ = T$. En nuestro caso tenemos $T = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$, por lo tanto S estará definido por el conjunto de polinomios en $\mathbb{R}_3[x]$ que se anulan simultáneamente en f_1, f_2 y f_3. Para simplificar la notación denotemos $v_1 := 1$, $v_2 := x-1$, $v_3 := x^2+x$ y $v_4 := x^3-1$.

Haciendo cómputos directos obtenemos que, para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ arbitrarios, se tiene

$$f_1\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = a - b + c - d$$

$$f_2\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = 2a + \frac{2}{3}c$$

Más aún, como $(3, 0, 2, 0) = (f_3)_{B^*} = (f_3(v_1), f_3(v_2), f_3(v_3), f_3(v_4))$ entonces, expresando los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ como combinación lineal de los vectores de B, se tiene

$$\begin{aligned} f_3\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) &= af_3(1) + bf_3(x) + cf_3\left(x^2\right) + df_3\left(x^3\right) = \\ &= af_3(v_1) + bf_3(v_1 + v_2) + cf_3(v_3 - v_2 - v_1) + df_3(v_1 + v_4) = \\ &= a\cdot 3 + b(3+0) + c(2-0-3) + d(3+0) = 3a + 3b - c + 3d \end{aligned}$$

De esta forma, un polinomio genérico $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ se anula simultáneamente sobre f_1, f_2 y f_3 si y solo si $a - b + c - d = 0$, $2a + \frac{2}{3}c = 0$ y $3a + 3b - c + 3d = 0$.

De la segunda ecuación obtenemos $c = -3a$. Sustituyendo en la primera se tiene $a - b - 3a - d = 0$, de donde $d = -2a - b$. Sustituyendo las expresiones obtenidas para c y d en la tercera ecuación obtenemos $3a + 3b - (-3a) + 3(-2a - b) = 0$, que se simplifica a la identidad $0 = 0$, luego esta ecuación no aporta información.

Por consiguiente, el polinomio será de la forma

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = a + bx - 3ax^2 + (-2a - b)\, x^3 =$$

$$= a\left(1 - 3x^2 - 2x^3\right) + b\left(x - x^3\right)$$

Así, se tiene $S = \left\langle 1 - 3x^2 - 2x^3, x - x^3 \right\rangle$. Esto finaliza el ejercicio.

Observación. Como S tiene dimensión 2 entonces S° tiene dimensión $4 - 2 = 2$, es decir, el conjunto $\{f_1, f_2, f_3\}$ NO es un conjunto linealmente independiente, dado que genera un subespacio de dimensión 2. El hecho de que no sean linealmente independientes se vio reflejado cuando, al resolver el sistema de ecuaciones para a, b, c, d, ocurrió que una de las ecuaciones se redujo a la identidad trivial $0 = 0$.

Ejercicio 4. Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definimos $M_A : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ como $M_A(B) = AB$.

a) Probar que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A, también lo es de M_A.

b) Probar que si E_λ es el autoespacio asociado al autovalor λ para A, y $\overline{E_\lambda}$ es el autoespacio asociado a λ para M_A, entonces $\dim\left(\overline{E_\lambda}\right) = n \dim(E_\lambda)$.

c) Deducir que si A es diagonalizable entonces M_A también.

Solución. Para cada $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, si B_i denota el i-ésimo vector columna de B entonces escribiremos $B = (B_1 \mid \cdots \mid B_n)$.

a) Sea $v \in \mathbb{K}^n$ un vector no nulo tal que $Av = \lambda v$. Tomando la matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $B_i = v$ para todo $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, se tiene que $AB_i = \lambda B_i$ para dichos valores de i, luego

$$M_A(B) = AB = A(B_1 \mid \cdots \mid B_n) = (AB_1 \mid \cdots \mid AB_n) =$$

$$= (\lambda B_1 \mid \cdots \mid \lambda B_n) = \lambda (B_1 \mid \cdots \mid B_n) = \lambda B$$

Como además trivialmente B no es la matriz nula, se tiene que B es un autovector de M_A asociado al autovalor λ. Por lo tanto, λ es autovalor de M_A. ■

b) Probemos el siguiente lema: Para $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ se cumple que $B \in \overline{E_\lambda}$ si y solo si $B_i \in E_\lambda$ para todo $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$.

En efecto, $B \in \overline{E_\lambda}$ si y solo si $AB = \lambda B$. Esto ocurre si y solo si

$$(AB_1 \mid \cdots \mid AB_n) = \lambda (B_1 \mid \cdots \mid B_n) = (\lambda B_1 \mid \cdots \mid \lambda B_n)$$

lo cual ocurre si y solo si $AB_i = \lambda B_i$ para todo $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$. Esto es exactamente lo mismo que decir que $B_i \in E_\lambda$ para todo $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$.

Se sigue que $\overline{E_\lambda}$ es el subespacio de $\mathbb{K}^{n\times n}$ formado por las matrices cuyas columnas pertenecen a E_λ. Como hay exactamente n columnas, y cada columna es independiente del resto, se tiene que $\dim\left(\overline{E_\lambda}\right) = n \dim(E_\lambda)$. ■

c) Recordemos que un endomorfismo lineal $f : V \to V$, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita, es diagonalizable si y solo si la suma de las dimensiones de sus autoespacios es igual a la dimensión de V.

Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ los autovalores de A. Entonces $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son, por el primer inciso, también autovalores de M_A. Además, M_A no puede tener otros autovalores. En efecto, si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de M_A, existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ no nula tal que $AB = \lambda B$. Como B es no nula, existe una columna v de B tal que $v \neq 0$. Usando el lema probado en el inciso anterior se tiene $Av = \lambda v$, de donde λ es autovalor de A. Así, $\lambda \in \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$.

Como A es diagonalizable entonces

$$\sum_{i=1}^{r} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = n$$

Queremos ver que $\sum_{i=1}^{r} \dim\left(\overline{E_{\lambda_i}}\right) = n^2$. En efecto, usando el inciso anterior y la igualdad que acabamos de observar, se tiene

$$\sum_{i=1}^{r} \dim\left(\overline{E_{\lambda_i}}\right) = \sum_{i=1}^{r} n \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = n \sum_{i=1}^{r} \dim\left(E_{\lambda_i}\right) = n^2$$

y por lo tanto M_A es diagonalizable. ■